

Generalisierte Kontinua mit Mikro- Struktur in $3n$ Dimensionen

Baumgarte, Joachim

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 22, 1970,
S. 63-104



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Generalisierte Kontinua mit Mikro-Struktur in $3n$ Dimensionen

Von Joachim Baumgarte
Vorgelegt von Hermann Schaefer †

(Eingegangen am 3. 2. 1970)

Inhalt

Zusammenfassung

1. Einleitung
2. Der Lagrange-Formalismus
3. Die Bewegungsgleichungen
4. Besonderheiten der neuen Theorie
5. Die Symmetriebedingungen und ihre Folgerungen für die formale $3n$ -dimensionale Theorie
6. Ausbreitung ebener Wellen
7. Das Cosserat-Kontinuum
8. Das Problem der spezifischen Wärme
9. Schlußfolgerungen
10. Anhang: Die verallgemeinerten Kompatibilitätsgleichungen von Beltrami-Michell

Literatur

Übersicht: Von der Atomgittertheorie ausgehend, wird durch „Kontinuuisierung“ ein generalisiertes Gesamtkontinuum erhalten, das aus n ineinanderliegenden durch Kräfte gekoppelten Unterkontinua besteht. In den Bewegungsgleichungen für das $3n$ -dimensionale Verschiebungsfeld treten neben n^2 Spannungstensoren, bei denen die endliche Reichweite der atomaren Wechselwirkungskräfte (Nichtlokalität) berücksichtigt wird, auch die Verschiebungsvektoren selbst auf.

Es werden die Symmetriebeziehungen für die Tensorindizes untersucht.

Das Cosserat-Kontinuum wird als ein Sonderfall dieser Theorie abgeleitet.

Das Wellenspektrum zeigt 3 akustische und $3(n-1)$ optische Zweige und ermöglicht die Berechnung der spezifischen Wärme als Funktion der absoluten Temperatur analog einer verallgemeinerten Debye-Theorie.

Summary: Beginning at the lattice theory a generalized total continuum is rendered by continuisation. The total continuum contains n subcontinua which are put into one another and coupled by forces. In the equations of motion for the $3n$ -dimensional displacement field there appear next to n^2 stress tensors, where the finite range of atomic forces of interaction (non-locality) is taken into account, also the displacement vectors.

The symmetry relations of the tensor indices are studied.

The Cosserat-continuum is derived as an exception of this theory.

In the wave spectra there exist 3 acoustical and $3(n-1)$ optical branches and thereby allow for the derivation of the specific heat as a function of the absolute temperature in analogy with a generalized Debye-theory.

Zusammenfassung

Durch „Kontinuuisierung“ der Gittertheorie wird eine physikalisch anschauliche Kontinuumstheorie in $3n$ -Dimensionen abgeleitet, die das mechanische Verhalten von kristallinen Festkörpern makroskopisch beschreibt. Das Gesamtgitter besteht aus n ineinandergesetzten und durch Kräfte gekoppelten Untergittern und daher das durch Grenzübergang erhaltene generalisierte Gesamtkontinuum aus n ineinanderliegenden Unterkontinua.

Die Vorgänge im Gesamtkontinuum werden neben den n 3-dimensionalen Verschiebungsvektoren bzw. dem $3n$ -dimensionalen Verschiebungsfeld durch n^2 Spannungstensoren beschrieben, von denen n als „Selbstspannungstensoren“ und $n(n-1)$ als „Wechselspannungstensoren“ bezeichnet werden können.

Im verallgemeinerten Hookeschen Gesetz enthalten die n^2 Spannungstensoren nicht nur erste räumliche Ableitungen und bei Nichtlokalität der Kohäsionskräfte auch höhere räumliche Ableitungen der Verschiebungsvektoren, sondern die Verschiebungsvektoren selbst können in den Spannungstensoren auftreten.

Zu den Volumkräften gehören u. a. nicht nur die Trägheitskräfte, welche die zweiten zeitlichen Ableitungen der Verschiebungsvektoren enthalten, sondern es treten auch hier Ausdrücke auf, in denen die Verschiebungsvektoren selbst vorkommen.

Nichtlokale Effekte können in Integral- oder in Differentialform ausgedrückt werden, wobei die einfache lokale Theorie nur die zweiten räumlichen Ableitungen enthält.

Der gesamte mathematische Formalismus erscheint trotz der Verallgemeinerung auf $3n$ Dimensionen ähnlich einfach wie die übliche dreidimensionale Elastizitätstheorie. Genau wie bei einem einfachen mechanischen, aus n Massenpunkten im Raum bestehenden System mit Federkräften lautet die Bewegungsgleichung in Matrizenschreibweise — mit \mathbf{u} als $3n$ -dimensionaler Verschiebungsvektor, \mathbf{m} Massenmatrix, \mathbf{c} Federmatrix und \mathbf{P} als Vektor der äußeren Kräfte — formal nicht anders als

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c} \mathbf{u} = \mathbf{P},$$

wobei jedoch in der Kontinuumsmechanik, außer daß $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ist, die Elemente der Federmatrix als Operatoren (Integraloperatoren) erscheinen.

Die Symmetriegesetze, denen die Tensorindizes gehorchen müssen, folgen aus der Tatsache, daß die Bewegungsgleichungen aus einer Lagrange-Funktion abgeleitet werden. Sie bedingen, daß elastische Wellen Lösungen des Bewegungsgleichungssystems sind.

Das Wellenspektrum der $3n$ -dimensionalen Elastizitätstheorie enthält neben 3 akustischen noch weitere $3(n-1)$ optische Zweige. Dem Spektrum können auch einzelne Spektrallinien überlagert sein.

Das Cosserat-Kontinuum erscheint als Sonderfall dieser Theorie, wenn die Bindungskräfte zwischen den Partikeln der Elementarzelle sehr viel stärker als die Bindungskräfte zwischen den benachbarten Zellen sind, so daß die Zellenpartikel praktisch einen starren Elementarkörper bilden.

Die Kenntnis des Wellenspektrums gestattet es, die spezifische Wärme des Festkörpers entsprechend einer verallgemeinerten Debye-Theorie unter Berücksichtigung der optischen Zweige zu berechnen. Das θ^3 -Gesetz bei tiefen Temperaturen bleibt erhalten, während Abweichungen vom Debye-Verhalten bei höheren Temperaturen auftreten. Eine Reihe von charakteristischen Temperaturen beschreibt die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmen. Bei extrem hohen Temperaturen ergibt sich das Gesetz von *Dulong* und *Petit*. Das Wellenspektrum ermöglicht die Berechnung aller Materialkonstanten und die Überprüfung der neuen Theorie durch Experimente (Neutronen-Beugung). Eine Verbindung zwischen der $3n$ -dimensionalen Elastizitätstheorie und der statistischen Mechanik liefert Aussagen über die Stabilität des Gesamtgitters, insbesondere im Hinblick auf vorhandene Kristalldefekte.

1. Einleitung

Viele Arbeiten der letzten Jahre (vgl. z. B. *Mindlin* [23, 24, 25, 26, 27, 28], *Krumhansl* [17, 18], *Kunin* [19, 20, 21], *Toupin* [32, 33, 34, 35], *Kröner* [12, 13, 14, 15], *Eringen* [4, 5, 6, 7, 8], *Green* und *Rivlin* [9, 10]) befaßten sich mit der Möglichkeit einer Erweiterung der Kontinuumsmechanik. Doch schon viel früher verallgemeinerten *A. L. Cauchy* und *B. de Saint Venant* die klassische Elastizitätstheorie durch Hinzunahme höherer räumlicher Ableitungen des Verzerrungstensors in die elastische Energiedichte. Auch wurden Medien, deren Elementarpartikel nicht nur mit Kräften, sondern auch mit Drehmomenten aufeinander wirken, bereits von *W. Voigt* betrachtet und von den Brüdern *E.* und *F. Cosserat* [3] genau untersucht.

In dieser Arbeit*) soll durch eine physikalisch anschauliche Vorstellung, die auf der Gittertheorie basiert, eine möglichst allgemeine (lineare) Kontinuumsmechanik behandelt werden. Die Strukturuntersuchungen der festen Materie mittels Röntgen- und Korpuskularstrahlen haben ergeben, daß der überwiegende Teil kristallin ist, demnach als aus einem allgemeinen Raumgitter bestehend aufgefaßt werden kann.

Als primitives räumliches Punktgitter oder Bravaisches Raumgitter bezeichnet man ein System von unendlich vielen Punkten, wobei der Aufbau aus dem Prinzip der regelmäßigen Umgebung eines Atoms durch Nachbaratome folgt. Ein solches Gitter entsteht aus einem Gitterpunkt durch eine Gruppe von Translationen.

Das allgemeine oder nicht primitive Raumgitter besteht aus einer Anzahl ineinandergesetzter primitiver Gitter, wobei die Atome der einzelnen Teilgitter im allgemeinen verschieden sind.

Ein solches allgemeines Gesamtgitter werde hier betrachtet. Das Gesamtgitter bestehe also aus n ineinanderliegenden primitiven Gittern, die miteinander gekoppelt sind. Die Kraftwirkungen zwischen den Gitteratomen erfassen nicht nur die nächsten Nachbarn, sondern besitzen eine größere Reichweite (Nicht-

*) Sie ist eine Erweiterung des Vortrages von *J. Baumgarte* und *E. Kröner*, der auf dem 12. International Congress of Applied Mechanics gehalten wurde [1].

lokalität). Diese weitreichende Wechselwirkung zeigen nicht nur die Atome des jeweiligen Teilgitters unter sich, sondern auch die Teilgitter gegeneinander.

Durch Grenzübergang vom Gitter zum Kontinuum wird ein „Gesamtkontinuum“ erhalten, das aus n ineinanderliegenden, gekoppelten „Unterkontinua“ besteht. Für die Beschreibung des Zustandes in jedem Unterkontinuum benötigt man eine Vektorgleichung entsprechend der normalen Elastizitätstheorie, wobei die Nichtlokalität durch höhere als zweite räumliche Ableitungen berücksichtigt werden kann. Die Wechselwirkungen der Unterkontinua miteinander erscheinen am jeweils betrachteten Teilmedium als äußere Kräfte, während sie für das Gesamtmedium als innere Kräfte wirksam sind.

Die Bewegungsgleichungen, die das Geschehen im jeweiligen Unterkontinuum beschreiben, werden durch jeweils ein 3-dimensionales Verschiebungsfeld dargestellt. Da n Teilmedien vorhanden sind, kann man formal mit einem $3n$ -dimensionalen Verschiebungsfeld rechnen.

2. Der Lagrange-Formalismus

Zur Ableitung der Bewegungsgleichungen wird der Lagrange-Formalismus benutzt. Dazu müssen die potentielle und die kinetische Energie aufgestellt werden. In den folgenden Ausführungen werden drei Vereinfachungen angenommen:

- a) Es wird eine lineare Theorie behandelt.
- b) Alle Untergitter sind unendlich ausgedehnt.
- c) Es werden nur kubische Untergitter betrachtet.

Die n Untergitter werden mit α bzw. β bezeichnet, wobei α bzw. β von 1 bis n laufen. Es sei u_i^α die Komponente i des Verschiebungsvektors \mathbf{u}^α für den Gitterpunkt $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ des Untergitters α .

Für kleine Verschiebungen ist es möglich, die potentielle Energie zu entwickeln [22].

$$W = W_0 + \underbrace{\sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}^m u_i^{\alpha}}_{W_1} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{\alpha, \beta} \Phi_{\alpha \beta}^m u_i^{\alpha} u_k^{\beta}}_{W_2} + \dots \quad (2.1)$$

Es gilt hierbei für die Vektor- und Tensorindizes i und k die Summations-Konvention, während die Summation über die Gitterpunkte \mathbf{m} bzw. \mathbf{n} sowie die Untergitter α bzw. β durch das Summenzeichen beschrieben wird.

Die Koeffizienten der Entwicklung (2.1) sind Ableitungen der potentiellen Energie W in der Gleichgewichtslage (mit $x_i = \mathbf{r}$ als Ortsvektor).

$$\Phi_{\alpha}^m = \frac{\partial W}{\partial x_i^{\alpha}}; \quad \Phi_{\alpha \beta}^m = \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^{\alpha} \partial x_k^{\beta}}. \quad (2.2)$$

Dabei bedeutet Φ_{α}^m die Kraft, die auf das Atom \mathbf{m} des Teilgitters α in Richtung i wirkt. Diese Kraft, und damit das ganze Glied W_1 in (2.1) verschwindet,

weil man um die Gleichgewichtslage entwickelt hat. Die höheren Glieder in (2.1) werden wegen der Voraussetzung a), d. h. bei Annahme kleiner Verschiebungen, gegenüber W_0 vernachlässigt. Die Energie W_0 des Gesamtgitters im Gleichgewicht kann durch geeignete Normierung zum Verschwinden gebracht werden. Das entscheidende Glied W_2 beschreibt die Erhöhung der Gitterenergie durch die Verschiebungen. Die in W_2 auftretenden Kopplungsparameter $\Phi_{i \ k}^{m \ n}$ haben folgende anschauliche Bedeutung: $\Phi_{i \ k}^{m \ n} \cdot s_{\underline{k}}^{\underline{n}}$ *) ist die Kraft auf das Atom m des Untergitters α in Richtung i , wenn das Atom n des Teilgitters β in Richtung k um die Länge s verschoben ist, und dabei alle anderen Atome in der Gleichgewichtslage verbleiben.

Nun wird der Übergang vom Gitter zum Kontinuum vollzogen. Es werden zu diesem Zweck kontinuierliche Kopplungsparameter $\Phi_{i \ k}^{\alpha \beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, mit \mathbf{r} als Ortsvektor, eingeführt, die an den Stellen m bzw. n , den Gleichgewichtslagen der Gitterpunkte, mit den Werten der diskontinuierlichen Größen $\Phi_{i \ k}^{m \ n}$ übereinstimmen.

Entsprechendes gilt für den Zusammenhang zwischen den kontinuierlichen Verschiebungsvektoren $u_i^{\alpha}(\mathbf{r})$ mit den diskontinuierlichen Vektoren $u_i^{m \ n}$.

Die Euler-Maclaurinsche Formel ermöglicht es, eine Summe in ein Integral zu überführen. Die Probleme, die bei einer solchen Kontinuuisierung auftreten, sind bereits an anderen Stellen ausführlich behandelt worden [14, 36].

Trotzdem sollen hier darüber noch einige Bemerkungen gemacht werden, denn der Übergang vom Gitter zum Kontinuum ist ein entscheidender Punkt bei allen folgenden Überlegungen.

Die eingeführten kontinuierlichen Funktionen sind nicht nur allein durch die Vorschrift der Übereinstimmung der diskontinuierlichen mit den kontinuierlichen Größen an den Gitterpunkten definiert. Man muß außerdem noch berücksichtigen, daß die Konvergenz der Euler-Maclaurinschen Formel von der Auswahl dieser kontinuierlichen Funktionen abhängt. Daher soll verabredet werden, die Funktionen gerade so zu wählen, daß diejenigen Glieder, welche Ableitungen dieser Funktionen in der Euler-Maclaurinschen Formel enthalten, ein Minimum zu der Summe, die in ein Integral umgewandelt werden soll, beitragen.

Diese Vereinbarung bedeutet natürlich, daß die kontinuierlichen Funktionen zwischen den Gitterpunkten möglichst glatt verlaufen müssen. Wenn das Gitter nicht unendlich ausgedehnt ist, sondern eine endliche Größe hat, wandelt die Euler-Maclaurinsche Formel die Gittersummen in Volum- und Oberflächenintegrale um [14]. Die obige Vorschrift bestimmt also, daß die Oberflächenintegrale, welche Ableitungen dieser Funktionen enthalten, nur ein Minimum beitragen.

*) Unterstreichen bedeutet: Nicht summieren.

Es zeigt sich, daß es unmöglich ist, diese Integrale exakt verschwinden zu lassen. Man hätte sonst eine strenge Kontinuumstheorie erhalten, um eine diskrete Mannigfaltigkeit zu beschreiben. Dies kann jedoch nicht sein.

Nach Anwendung der Euler-Maclaurinschen Summenformel erhält man nun aus (2.1) für die potentielle Energie:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \iint dV dV' \Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_i^\alpha(\mathbf{r}) u_k^\beta(\mathbf{r}'), \quad (2.3)$$

mit $\alpha, \beta = 1, 2, 3 \cdots n$.

Die kinetische Energie T hat die Form:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \int \varrho^\alpha \dot{u}_i^\alpha \dot{u}_i^\alpha dV. \quad (2.4)$$

Hierbei ist ϱ^α die Dichte des Unterkontinuums α . Die Lagrange-Funktion L ergibt sich als Differenz der Gleichungen (2.4) und (2.3):

$$L = T - W. \quad (2.5)$$

Der Lagrange-Formalismus liefert die Beziehung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} = \varrho^\alpha F_i^\alpha(\mathbf{r}). \quad (2.6)$$

Die Größen $F_i^\alpha(\mathbf{r})$ bedeuten die Kräfte pro Masseneinheit.

Es muß hierbei bemerkt werden, daß die Wechselwirkungskräfte der Medien untereinander in der potentiellen Energie W enthalten sind.

3. Die Bewegungsgleichungen

Die Ausführung der Differentiation im Lagrange-Formalismus (2.6) liefert n Vektorgleichungen für die Bewegung der n Unterkontinua, die in der Form von $3n$ -simultanen Integro-Differentialgleichungen erscheinen:

$$\varrho^\alpha \ddot{u}_i^\alpha(\mathbf{r}) + \sum_{\beta} \int dV' \Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_k^\beta(\mathbf{r}') = \varrho^\alpha F_i^\alpha(\mathbf{r}). \quad (3.1)$$

Dieses Gleichungssystem beschreibt das physikalische Geschehen des Gesamtkontinuums und stellt eine sehr allgemeine Lösung des behandelten (linearen) Problems dar.

Der Spezialfall $n = 1$ wurde von *E. Kröner* [14] behandelt. Dieser Sonderfall muß natürlich in (3.1) enthalten sein.

Es ist selbstverständlich, daß die Kerne $\Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ nicht beliebiges Aussehen haben können, sondern einigen Einschränkungen unterworfen sein müssen, um einen physikalisch vernünftigen Festkörper zu beschreiben. Diese Einschränkungen sind folgende:

- (1) Die Reichweiten der atomaren Kohäsionskräfte sind beschränkt, also

$$\lim_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty} \Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0. \quad (3.2)$$

Dies bedeutet für die mathematische Darstellungsweise, daß es möglich ist, wie später gezeigt wird, die Bewegungsgleichungen in Form von Differentialgleichungen (wenn auch höherer Ordnung) auszudrücken.

- (2) Der Kern besitzt die Symmetrie

$$\Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Phi_{ki}^{\beta\alpha}(\mathbf{r}', \mathbf{r}). \quad (3.3)$$

Diese Symmetrie in den Tripeln (i, α, \mathbf{r}) und (k, β, \mathbf{r}') folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß die Wechselwirkungskräfte der Teilmedien untereinander aus der potentiellen Energie W abgeleitet werden. In (2.3) gilt offenbar die Symmetrie:

$$\Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_i^\alpha(\mathbf{r}) u_k^\beta(\mathbf{r}') = \Phi_{ki}^{\beta\alpha}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) u_k^\beta(\mathbf{r}') u_i^\alpha(\mathbf{r}). \quad (3.4)$$

- (3) Bei einer beliebigen — für alle Teilmedien gleichen — konstanten Verschiebung s_k dürfen keine Kräfte auftreten (Invarianz gegenüber gemeinsamer Translation bei beliebigem s_k):

$$\sum_\beta \int dV' \Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') s_k = \sum_\beta \int dV' \Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0. \quad (3.5)$$

- (4) Bei einer beliebigen — ebenfalls für alle Teilmedien gleichen — konstanten Drehung $\omega_{[kj]}$ dürfen ebenfalls keine Kräfte auftreten (Invarianz gegenüber gemeinsamer Rotation bei beliebigem $\omega_{[kj]}$):

$$\sum_\beta \int dV' \Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') x_j' \omega_{[kj]} = 0 \quad (3.6)$$

oder

$$\sum_\beta \int dV' \Phi_{ik}^{\alpha\beta} x_j' = \sum_\beta \int dV' \Phi_{ij}^{\alpha\beta} x_k' = \sum_\beta \int dV' \Phi_{i(k}^{\alpha\beta} x_{j)}'. \quad (3.7)$$

Das bedeutet auch

$$\sum_\beta \int dV' \Phi_{i[k}^{\alpha\beta} x_{j]}' = 0. \quad (3.8)$$

Die eckigen bzw. runden Klammern bei den Indizes k und j bedeuten Schief-symmetrie bzw. Symmetrie in diesen Indizes, also

$$\begin{aligned} \omega_{kj} &= -\omega_{jk} = \omega_{[kj]}; \\ \Phi_{ik}^{\alpha\beta} x_j' &= -\Phi_{ij}^{\alpha\beta} x_k' = \Phi_{i[k}^{\alpha\beta} x_{j]}'; \\ \Phi_{ik}^{\alpha\beta} x_j' &= \Phi_{ij}^{\alpha\beta} x_k' = \Phi_{i(k}^{\alpha\beta} x_{j)}'. \end{aligned} \quad (3.9)$$

- (5) Für jede beliebige (kleine) Deformation des Gesamtkontinuums ist positive Arbeit aufzuwenden*). Dies heißt, daß für alle im Gesamtgitter möglichen elastischen Wellen, deren Wellenlängen zwischen unendlich und dem doppelten Zellenabstand liegen, nur reelle Frequenzen gehören dürfen.

*) W muß also im Debye-Bereich positiv definit sein.

Dieser Umstand bedeutet, daß auch alle möglichen Wellengeschwindigkeiten reell (bzw. positiv) sein müssen. Die letzte Einschränkung wirkt sich u. a. auf die Materialparameter (Größe und Vorzeichen) aus.

Um das Gleichungssystem (3.1) übersichtlicher darstellen zu können, ist es zweckmäßig, die Kopplungsparameter $\Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ durch Reihenentwicklung in eine Summe von Delta-Funktionen auszudrücken.

Die Möglichkeit einer solchen Darstellung ist eine Folge der Einschränkung 1) Gleichung (3.2), sowie der Annahme, daß die Größen $\Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ von der Differenz $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ allein abhängen. Es wird also der Fall homogener Medien behandelt. Die Entwicklung liefert:

$$\Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = [T_{ik}^{\alpha\beta} + T_{ikj}^{\alpha\beta} \partial_j + T_{ikjl}^{\alpha\beta} \partial_j \partial_l + T_{ikjlm}^{\alpha\beta} \partial_j \partial_l \partial_m + \dots] \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (3.10)$$

Die in Gleichung (3.10) auftretenden Glieder leiten sich von den Taylor-Gliedern der Fourier-Entwicklung des Kern $\Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ab.

Es ist dabei [16]

$$\begin{aligned} T_{ik}^{\alpha\beta} &= \int dV' \Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \\ T_{ikj}^{\alpha\beta} &= - \int dV' (x_j - x'_j) \Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \\ T_{ikjl}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2!} \int dV' (x_j - x'_j) (x_l - x'_l) \Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \\ T_{ikjlm}^{\alpha\beta} &= - \frac{1}{3!} \int dV' (x_j - x'_j) (x_l - x'_l) (x_m - x'_m) \Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Alle in Gleichung (3.11) auftretenden Tensoren $\Phi_{ik}^{\alpha\beta} \dots$ sind also Konstante.

Häufig ist es zweckmäßig, die Kerne $\Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ bis zu Gliedern zweiter Ableitung zu entwickeln und die verbleibenden Glieder höherer Ableitungen in einem Restkern zusammenzufassen:

$$\Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = [T_{ik}^{\alpha\beta} + T_{ikj}^{\alpha\beta} \partial_j + T_{ikjl}^{\alpha\beta} \partial_j \partial_l] \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \partial_j \partial_l t_{ikjl}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (3.12)$$

Für die Restkerne gilt mit gleichfalls konstanten $T_{ikj}^{\alpha\beta} \dots$

$$t_{ikjl}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = [T_{ikjlm}^{\alpha\beta} \partial_m + T_{ikjlmn}^{\alpha\beta} \partial_m \partial_n + \dots] \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (3.13)$$

Sie beschreiben die über die nächsten Nachbarn hinaus reichenden Kohäsionskräfte der Atome (Nichtlokalität [14, 16]).

Nach partiellen Integrationen erhält man schließlich für das System der Bewegungsgleichungen:

$$\varrho^\alpha \ddot{u}_i^\alpha + \sum_\beta [T_{ik}^{\alpha\beta} u_k^\beta + T_{ikj}^{\alpha\beta} u_{k,j}^\beta + T_{ikjl}^{\alpha\beta} u_{k,jl}^\beta + \partial_j \int dV' t_{ikjl}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_{k,l}^\beta(\mathbf{r}')] = \varrho^\alpha F_i^\alpha. \quad (3.14)$$

Setzt man in (3.14) $t_{ikjl}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$, so hat man es mit dem der normalen Theorie entsprechenden Fall kurzer Reichweite (Lokalität) zu tun.

In der Schreibweise (3.14) lassen sich die Einschränkungen (3) und (4) übersichtlicher darstellen.

Aus Gleichung (3.5) ergibt sich jetzt

$$\sum_\beta T_{ik}^{\alpha\beta} s_k = \sum_\beta T_{ik}^{\alpha\beta} = 0 \quad (3.15)$$

und aus Gleichung (3.6) folgt nun

$$\sum_\beta T_{ikl}^{\alpha\beta} \partial_l x_j \omega_{[kj]} = \sum_\beta T_{ikl}^{\alpha\beta} \delta_{lj} \omega_{[kj]} = 0^*). \quad (3.16)$$

Daraus erhält man

$$\sum_\beta T_{ikj}^{\alpha\beta} = \sum_\beta T_{i(kj)}^{\alpha\beta}, \quad (3.17)$$

d. h. entsprechend (3.8)

$$\sum_\beta T_{i[kj]}^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.18)$$

Wie man sieht, sind Translationsschwingungen der starren Untermedien gegeneinander Lösungen des Gleichungssystems (3.14). Außerdem zeigen die Gleichungen (3.14) und (3.17), daß im allgemeinen eine für alle Teilmedien gleiche konstante Verzerrung $\varepsilon_{(kl)}$ nur in Verbindung mit konstanten Verschiebungen s_k^β der Teilgitter gegeneinander eine Lösung des Gleichungssystems (3.14) bei Abwesenheit von Volumkräften darstellt, also

$$u_k^\beta = \varepsilon_{(kl)} x_l + s_k^\beta. \quad (3.19)$$

Diese Lösung bedeutet aber physikalisch: Alle Teilgitter sind in gleicher Weise homogen verzerrt und dabei so gegeneinander verschoben, daß die entsprechenden Partikelabstände konstant sind. Bei einer gemeinsamen Verzerrung aller Teilgitter werden also die Zellen gleichfalls deformiert.

Wird der Ausdruck (3.19) bei vorgegebenen $\varepsilon_{(kl)}$ in (3.14) eingesetzt, so können die zugehörigen konstanten Teilgitterverschiebungen s_k^β durch $3n$ lineare Gleichungen bei Abwesenheit von Volumkräften bestimmt werden. Diese Gleichungen lauten:

*) δ_{ij} ist das Kronecker-Symbol.

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\beta} T_{ik}^{\alpha\beta} \right) \varepsilon_{(kl)} x_l + \sum_{\beta} \left[T_{ik}^{\alpha\beta} s_k^{\beta} + T_{ikj}^{\alpha\beta} \partial_j (\varepsilon_{(kl)} x_l) \right] \\ &= \sum_{\beta} \left[T_{ik}^{\alpha\beta} s_k^{\beta} + T_{ikj}^{\alpha\beta} \delta_{jl} \varepsilon_{(kl)} \right] = \sum_{\beta} \left[T_{ik}^{\alpha\beta} s_k^{\beta} \right] + \left[\sum_{\beta} T_{i(kj)}^{\alpha\beta} \right] \varepsilon_{(kj)} = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dabei wurde die Beziehung

$$\sum_{\beta} T_{ik}^{\alpha\beta} = 0 \quad (3.15)$$

benutzt.

4. Besonderheiten der neuen Theorie

Im Gegensatz zur normalen Elastizitätstheorie existiert in der neuen Theorie nicht nur ein Spannungstensor. Es sind vielmehr n^2 Spannungstensoren vorhanden.

Der Ausdruck (vgl. (3.14))

$$\sigma_{ji}^{\alpha\beta} = - \left[T_{ikj}^{\alpha\beta} u_k^{\beta} + T_{ikjl}^{\alpha\beta} u_{k,l}^{\beta} + \int dV' t_{ikjl}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_{k,l}^{\beta}(\mathbf{r}') \right] \quad (4.1)$$

kann für $\alpha = \beta$ als „Selbst-Spannungstensor“ bezeichnet werden. Er gibt den Spannungszustand im Medium α an, während die anderen Ausdrücke (mit $\alpha \neq \beta$) auf das Untermedium α wie äußere Kräfte wirken.

Ist im Tensor $\sigma_{ji}^{\alpha\beta}$ nach (4.1) $\alpha \neq \beta$, so kann in diesem Fall von „Wechselspannungstensoren“ gesprochen werden, welche die Wechselwirkungen der Teilkontinua untereinander berücksichtigen. Von den Insgesamt n^2 Spannungstensoren sind also n Selbst-, die restlichen $n(n-1)$ Wechselspannungstensoren.

Hervorzuheben ist noch, daß gegenüber der üblichen Elastizitätstheorie die Verschiebungsvektoren selbst und nicht nur ihre ersten (und höheren) räumlichen Ableitungen in den Spannungstensoren auftreten.

Definiert man als Gesamtspannungstensor des Untermediums α die Größe

$$\sigma_{ji}^{\alpha} = \sum_{\beta} \sigma_{ji}^{\alpha\beta} \quad (4.2)$$

so ergibt sich aus (3.14)

$$\varrho^{\alpha} \ddot{u}_i^{\alpha} + \sum_{\beta} T_{ik}^{\alpha\beta} u_k^{\beta} - \partial_j \sigma_{ji}^{\alpha} = \varrho^{\alpha} F_i^{\alpha}. \quad (4.3)$$

Für die Randbedingungen des Mediums α bei nicht unendlich ausgedehnten Medien erhält man nach Einführung des Gesamtspannungstensors σ_{ji}^{α} :

$$h_j \sigma_{ji}^{\alpha} = P_i^{\alpha} \quad (4.4)$$

mit der äußeren Normalen h_j und der am Medium α angreifenden Randkraft P_i^{α} .

Es soll nun die physikalische Bedeutung der Tensoren $T_{ik}^{\alpha\beta}$ und $T_{ikj}^{\alpha\beta}$ untersucht werden, die gegenüber der üblichen Theorie neu auftreten.

Die Glieder $T_{ik}^{\alpha\beta} u_k^\beta$ sind wie die Ausdrücke $\varrho^\alpha \ddot{u}_i^\alpha$ Volumkräfte. Sie geben die Nahwirkungskräfte der in einer Zelle benachbart liegenden Partikel wieder. Es bedeutet also $T_{ik}^{\alpha\beta} u_k^\beta$ die Kraft, die auf den Punkt mit dem Ortsvektor \mathbf{r} des Untermediums α in i -Richtung wirkt, wenn der zur gleichen Zelle des Unterkontinuums β gehörende Punkt, der gleichfalls den Ortsvektor \mathbf{r} besitzt, in Richtung k verschoben ist.

Würden die $T_{ik}^{\alpha\beta}$ verschwindend klein sein, so könnte man ein Untermedium nach dem andern aus dem Gesamtmedium herausziehen. Denn ohne diese Glieder wären n verschiedene, konstante Verschiebungsvektoren

$$u_i^\alpha = \dot{u}_i^\alpha \quad (4.5)$$

eine Lösung des Gleichungssystems (3.14), was das Auseinanderreißen des Gesamtgitters bedeutet.

Wie später gezeigt wird, sind die Größen $T_{ik}^{\alpha\beta}$ auch verantwortlich für das Auftreten der 3 $(n-1)$ optischen Zweige.

Die Tensoren $T_{ikj}^{\alpha\beta}$ hingegen treten nur auf, wenn keine Zentrosymmetrie vorliegt. Im Fall von Zentrosymmetrie verschwinden übrigens alle Größen $T_{ikj}^{\alpha\beta} \dots$, die eine ungerade Zahl von unteren Indizes besitzen und damit eine ungerade Anzahl von Ableitungen bezeichnen.

Aus Gleichung (4.1) geht hervor: Das Glied $T_{ikj}^{\alpha\beta} u_k^\beta$ ist jener Anteil des Spannungstensors $\sigma_{ji}^{\alpha\beta}$, der den Verschiebungsvektor u_k^β selbst und nicht nur seine erste räumliche Ableitung, enthält. Der Ausdruck $T_{ikj}^{\alpha\beta} u_k^\beta$ bedeutet daher die Kraft, die auf den Punkt \mathbf{r} des Unterkontinuums α in i -Richtung wirkt, wenn das Untermedium β im Bereich um \mathbf{r} die Distorsion $u_{k,j}^\beta$ erfahren hat.

Weitere Folgerungen aus den bei Nicht-Zentrosymmetrie auftretenden Tensoren $T_{ikj}^{\alpha\beta}$ werden im Zusammenhang mit der Ausbreitung elastischer Wellen (Abschnitt 6) näher untersucht.

Von der hier abgeleiteten 3 n -dimensionalen Theorie muß natürlich verlangt werden können, daß der Fall der normalen Elastizitätstheorie $n = 1$ durch Grenzübergang als Sonderfall erhalten wird.

Der Übergang von einem beliebig großen n zum Fall $n = 1$ ergibt sich aus folgender Überlegung:

Die Kräfte zwischen den einzelnen Atomen einer Zelle läßt man so stark anwachsen, daß die Zelle zu einer Partikel zusammengezogen wird, also

$$T_{ik}^{\alpha\beta} \rightarrow \infty. \quad (4.6)$$

Dies bedingt, daß jetzt alle Teilmedien die gleiche Verschiebung

$$u_k^\beta = u_k \quad (4.7)$$

besitzen müssen. Bildet man die Summe aller n Vektorgleichungen, so erhält man stets die Gleichung für die Bewegung des Massenmittelpunktes und im

Fall des betrachteten Grenzüberganges (4.6) die gesuchte Bewegungsgleichung für den Sonderfall $n = 1$.

Nach (3.15) heben sich hierbei die Glieder $T_{ik}^{\alpha\beta} u_k^\beta$ als innere Kräfte (actio = reactio) heraus.

Es verbleibt jedoch der Ausdruck

$$\sum_{\alpha, \beta} T_{ik}^{\alpha\beta} u_{k,j} = T_{ikj} u_{k,j}. \quad (4.8)$$

Nach (3.17) gilt hierbei

$$T_{ikj} = T_{i(kj)}. \quad (4.9)$$

Man muß nun aus physikalischen Gründen verlangen, daß alle Komponenten des Tensors $T_{i(kj)}$ verschwinden, denn ein nach dem Grenzübergang (4.6) bzw. (4.7) erhaltenes einfaches Bravais-Gitter ist immer zentrosymmetrisch.

Um aber auch formal zeigen zu können, daß $T_{i(kj)} = 0$ ist, benötigt man noch die im nächsten Abschnitt ausführlich behandelten Symmetriegesetze. Sie liefern für den hier betrachteten Sonderfall

$$T_{i(kj)} = T_{[i(k]j]} = T_{[i(k]j]} = 0. \quad (4.10)$$

Man überzeugt sich leicht, daß alle Komponenten eines Tensors der Symmetrie $T_{[i(k]j]}$ verschwinden müssen.

5. Die Symmetriebedingungen und ihre Folgerungen für die formale $3n$ -dimensionale Theorie

Es sollen in diesem Abschnitt zunächst die Symmetriebedingungen untersucht werden, denen die Tensoren $T_{ik}^{\alpha\beta} \dots$ zu genügen haben.

Aus (3.10) bzw. (3.14) folgt, daß diese Größen in allen Indizes ab j (also in $j, k, l, m, n \dots$) untereinander symmetrisch sind, da die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen gilt.

Aus der Einschränkung 2) und den Transformationsgleichungen (3.11) folgt außerdem (bei Symmetrie in \mathbf{r} und \mathbf{r}'):

$$T_{ik \underbrace{jlm \dots}_{2p}}^{\alpha\beta} = T_{(ik)(jlm \dots)}^{(\alpha\beta)} + T_{[ik](jlm \dots)}^{[\alpha\beta]} \quad (5.1)$$

und (bei Antisymmetrie in \mathbf{r} und \mathbf{r}'):

$$T_{ik \underbrace{jlm \dots}_{2p+1}}^{\alpha\beta} = T_{(ik)(jlm \dots)}^{(\alpha\beta)} + T_{(ik)(jlm \dots)}^{[\alpha\beta]}. \quad (5.2)$$

Dies ist folgendermaßen einzusehen: Es sind die Kopplungsparameter $\Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ nur von $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ abhängig, daher in \mathbf{r} und \mathbf{r}' und demzufolge auch in den Paaren (i, α) und (k, β) symmetrisch. Deshalb sind auch nach (3.11) alle Größen $T_{ik}^{\alpha\beta} \dots$ mit einer geraden (ungeraden) Anzahl von unteren Indizes,

die eine gerade (ungerade) Anzahl von partiellen Ableitungen ausdrücken, in den Paaren (i, α) und (k, β) symmetrisch (unsymmetrisch). Also ist

$$T_{ik \underbrace{jlm \dots}_{2p}}^{\alpha\beta} = T_{ki(jlm) \dots}^{\beta\alpha} \quad (5.3)$$

und

$$T_{ik \underbrace{jlm \dots}_{2p+1}}^{\alpha\beta} = - T_{ki(jlm) \dots}^{\beta\alpha}. \quad (5.4)$$

Es ergibt sich somit für Gleichung (5.3): Wenn die Größe $T_{ik \underbrace{(jlm) \dots}_{2p}}^{\alpha\beta}$ in i und k symmetrisch (unsymmetrisch) ist, muß sie auch in α und β symmetrisch (unsymmetrisch) sein.

Entsprechendes gilt für Gleichung (5.4): Wenn die Größe $T_{ik \underbrace{(jlm) \dots}_{2p+1}}^{\alpha\beta}$ in i und k symmetrisch (unsymmetrisch) ist, muß sie in α und β unsymmetrisch (symmetrisch) sein.

Dies ist der Inhalt der Gleichungen (5.1) und (5.2).

Nach dem bisher Ausgeführten ist es zweckmäßiger und übersichtlicher, anstelle der $T_{ik(jl\dots)}^{\alpha\beta}$ die Größen $T_{RS(jl\dots)}$ einzuführen:

$$T_{ik \underbrace{(jlm) \dots}_{2p}}^{\alpha\beta} = T_{(RS)(jlm) \dots} \quad (5.5)$$

und

$$T_{ik \underbrace{(jlm) \dots}_{2p+1}}^{\alpha\beta} = T_{[RS](jlm) \dots}. \quad (5.6)$$

Die Indizes R und $S^*)$ geben jetzt sowohl die Nummer des Atoms in der Zelle als auch die Verschiebungsrichtung an. Sie durchlaufen also insgesamt $3n$ Werte. Dagegen laufen die Indizes j, l, m, n, \dots nur von 1 bis 3.

Die in den Gleichungen (5.5) und (5.6) angegebenen Symmetrien sind identisch mit den Symmetrie-Eigenschaften der Darstellung (5.1) und (5.2).

Die Aussagen von (5.5) und (5.6) sind nun folgende: Hat man die Invarianzbedingungen (3.15) und (3.17), die sich auf gemeinsame Verschiebungen und Drehungen im Dreidimensionalen beziehen, erfüllt, so kann man jetzt mit einem Vektor in einem $3n$ -dimensionalen Feld formal operieren. Die Matrizen mit den Indizes R und S enthalten $(3n)^2$ Komponenten und sind symmetrisch (antisymmetrisch), wenn die Komponenten eine gerade (ungerade) Anzahl für die Ordnung der räumlichen Ableitungen besitzen.

Nach dieser Überlegung kann man das System der Bewegungsgleichungen (3.14) in der folgenden Matrizendarstellung angeben:

$$\varrho_{RS} \ddot{u}_S + \widehat{\Phi}_{RS} u_S = \varrho_{RS} F_S \quad (5.7)$$

mit

$$u_S = (u_1, u_2, \dots, u_{3n}).$$

*) Mit $R = 3(\alpha - 1) + i$ und $S = 3(\beta - 1) + k$.

Hierbei enthält die Diagonalmatrix ϱ_{RS} jeweils drei aufeinanderfolgende, gleiche (konstante) Dichten. Die Elemente der Matrix $\widehat{\Phi}_{RS}$ sind Integraloperatoren. Sie können durch Reihenentwicklung in eine Summe von Differentialoperatoren umgeformt werden:

$$\widehat{\Phi}_{RS} = [T_{(RS)} + T_{[RS]j} \partial_j + T_{(RS)(jl)} \partial_j \partial_l + T_{[RS](jlm)} \partial_j \partial_l \partial_m + \dots]. \quad (5.8)$$

Man erhält also formal den gleichen mathematischen Aufbau, wie er bei den Bewegungsgleichungen eines aus n Massenprodukten im Raum mit Federkräften bestehenden System auftritt:

$$m_{RS} \ddot{u}_S + C_{RS} u_S = P_{RS} \quad (5.9a)$$

oder

$$\underline{m} \underline{u} + \underline{c} \underline{u} = \underline{P}. \quad (5.9b)$$

An die Stelle der Massenmatrix m_{RS} tritt die Dichtematrix ϱ_{RS} , an die Stelle der „Federmatrix“ C_{RS} tritt die Kopplungsmatrix $\widehat{\Phi}_{RS}$, usw. Die Elemente der Kopplungsmatrix sind allerdings Integraloperatoren, die nach Reihenentwicklung in eine (unendliche) Summe von Differentialoperatoren umgewandelt werden können.

Nun noch einige Bemerkungen zu den Spannungstensoren. Sie besitzen natürlich keine Symmetrie in den Indizes j und i . Nur im Sonderfall von Lokalität und Isotropie gilt bei Zentrosymmetrie für $\sigma_{ji}^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} \sigma_{ji}^{\alpha\beta} &= \sigma_{ji}^{(\alpha\beta)} = -T_{(ik)(jl)}^{(\alpha\beta)} u_{k,l}^{\beta} \\ &= [\{\lambda^{(\alpha\beta)} + \mu^{(\alpha\beta)}\} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \mu^{(\alpha\beta)} \delta_{ik} \delta_{jl}] u_{k,l}^{\beta}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Bei Nicht-Zentrosymmetrie tritt beim Spannungstensor $\sigma_{ji}^{\alpha\beta}$ noch das Glied

$$T_{ikj}^{\alpha\beta} u_k^{\beta} = T_{[ik]j}^{(\alpha\beta)} u_k^{\beta} = -\xi^{(\alpha\beta)} e_{ikj} u_k^{\beta} \quad (5.11)$$

auf *).

Sind die atomaren Wechselwirkungskräfte außerdem noch Zentralkräfte, so gelten die Cauchy-Relationen**). Es besteht dann bei Lokalität, Isotropie (und natürlich auch Zentrosymmetrie) für den Spannungstensor $\sigma_{ji}^{\alpha\beta}$, der jetzt in j und i symmetrisch ist, die Beziehung:

$$\sigma_{ji}^{\alpha\beta} = \sigma_{(ji)}^{(\alpha\beta)} = \mu^{(\alpha\beta)} [\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}]. \quad (5.12)$$

In der formalen $3n$ -dimensionalen Schreibweise existiert nur das Gegenstück zum Gesamtspannungstensor σ_{ji}^{α} (4.2). Beim verallgemeinerten Spannungstensor

$$\sigma_{jR} = -[T_{[RS]j} + T_{(RS)(jl)} \partial_l + T_{[RS](jlm)} \partial_l \partial_m + \dots] u_S \quad (5.13)$$

*) e_{ikj} ist der vollständig antisymmetrische Permutationstensor.

**) Es ist in diesem Fall $\Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \Phi_{ik}^{\alpha\beta}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$.

werden keine Unterscheidungen zwischen den einzelnen Untermedien mehr vorgenommen. Natürlich kann der Tensor σ_{jR} mit $3 \cdot 3n$ -Komponenten keine Symmetrien besitzen.

Im verallgemeinerten Hookeschen Gesetz tritt der $3n$ -dimensionale Verschiebungsvektor ebenfalls selbst auf, und zwar in der Form einer Fredholmschen Integralgleichung zweiter Art:

$$\sigma_{jR}(\mathbf{r}) = -T_{[RS]j} u_S(\mathbf{r}) - \int dV' t_{RSj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_S(\mathbf{r}'). \quad (5.14)$$

6. Ausbreitung ebener Wellen

In diesem Abschnitt wird das homogene Bewegungsgleichungssystem (3.14) betrachtet und daraus das Dispersionsgesetz für die Ausbreitung ebener Wellen abgeleitet. Zunächst werde für den Fall von Lokalität und Zentrosymmetrie ($T_{ijk}^{\alpha\beta} = 0$) das Gesamtmedium als isotrop (und auch homogen (3.10)) angesehen. Bei dieser Vereinfachung kann man setzen:

$$T_{ik}^{\alpha\beta} = \Sigma \iota^{(\alpha\beta)} \delta_{ik}$$

$$T_{ikjl}^{\alpha\beta} = -[\lambda^{(\alpha\beta)} + \mu^{(\alpha\beta)}] \cdot [\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk}] - \mu^{(\alpha\beta)} \delta_{ik} \delta_{jl}. \quad (6.1)$$

Hierbei sind $\Sigma \iota^{(\alpha\beta)}$, $\lambda^{(\alpha\beta)}$, $\mu^{(\alpha\beta)}$ elastische Konstanten. Damit erhält man für die Bewegungsgleichungen:

$$\varrho^\alpha \ddot{u}_i^\alpha - \sum_\beta [-\iota^{(\alpha\beta)} u_i^\beta + (\lambda^{(\alpha\beta)} + \mu^{(\alpha\beta)}) u_{k,ki}^\beta + \mu^{(\alpha\beta)} u_{i,kk}^\beta] = 0. \quad (6.2)$$

Wegen der vorliegenden Isotropie verstößt es nicht gegen die Allgemeinheit, eine in x_1 -Richtung laufende Welle anzunehmen.

$$u_i^\alpha = \hat{u}_i^\alpha e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad (6.3)$$

mit \hat{u}_i^α als konstantem Amplitudenvektor, k als Wellenzahl und ω als Frequenz.

Durch Einsetzen von (6.3) in (6.2) erhält man in bekannter Weise für die Existenz einer nicht-trivialen Lösung das Verschwinden einer Determinante.

In dem hier betrachteten Fall von Isotropie zerfällt die Hauptdeterminante in drei Teildeterminanten. Wenn man die Indizes α und β jetzt unten schreibt, liefert (mit der Diagonalmatrix $\varrho_{\alpha\beta}$)

$$\det \{ \omega^2 \varrho_{\alpha\beta} - \iota_{(\alpha\beta)} - (\lambda_{(\alpha\beta)} + \mu_{(\alpha\beta)}) k^2 \} = 0 \quad (6.4)$$

das Dispersionsgesetz für die longitudinalen Wellen und die zweimal auftretende Determinante

$$\det \{ \omega^2 \varrho_{\alpha\beta} - \iota_{(\alpha\beta)} - \mu_{(\alpha\beta)} k^2 \} = 0 \quad (6.5)$$

das Dispersionsgesetz für die transversalen Wellen. Im hier betrachteten Fall von Isotropie ist, genau wie bei der üblichen Elastizitätstheorie, die Zahl der transversalen Wellen doppelt so groß wie die Zahl der longitudinalen Wellen. Man erhält aus (6.4) und (6.5) drei Polynome der Form

$$H_p(\omega^2, k^2) = 0 \quad p = 1, 2, 3 \quad (6.6)$$

vom Grad n in ω^2 . Die zwei identischen Gleichungen liefern die zusammenfallenden transversalen Zweige, die andere Gleichung die longitudinalen Zweige im $\omega^2(k^2)$ bzw. $|\omega|(|k|)$ -Diagramm.

Gleichung (3.15) bedeutet, daß die Beziehung

$$\sum_{\beta} \epsilon^{\alpha\beta} = 0 \quad (6.7)$$

gilt. Dies bedingt für die Determinanten (6.4) und (6.5), daß

$$\det \{ \epsilon^{\alpha\beta} \} = 0 \quad (6.8)$$

ist. Diese Gleichung bedeutet jedoch, daß die Determinanten (6.4) und (6.5) — also sowohl für die longitudinalen als auch für die transversalen Wellen — jeweils eine Lösung $\omega^2 = 0$ besitzen.

Die (in jedem Fall) drei Zweige $\omega(k)$, besser $|\omega|(|k|)$ mit $\omega(0)$ nennt man akustische Zweige.

Bei den hierzu gehörenden (akustischen) Wellen schwingen alle Partikel der Elementarzelle für $k = 0$ in Phase. Entsprechend den Determinanten existieren ein longitudinaler Zweig und zwei zusammenfallende transversale (akustische) Zweige.

In der normalen Elastizitätstheorie gibt es nur diese drei akustischen Zweige.

In der hier entwickelten neuen Theorie treten zusätzlich $3(n-1)$ Zweige auf, für die $\omega(0) \neq 0$ ist (Abb. 1).

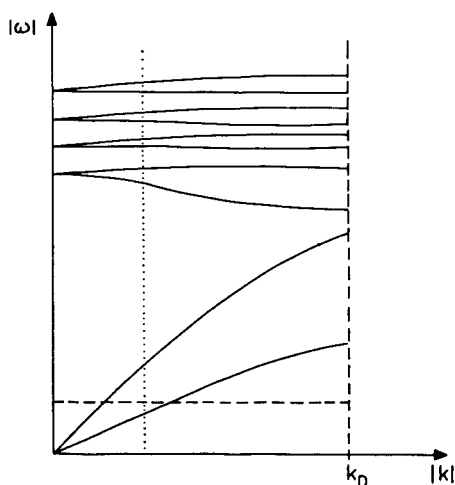


Abb. 1. Wellenspektrum bei Isotropie

Diese sogenannten optischen Zweige entsprechen Wellen, bei denen die Teilchen in der Elementarzelle gegenphasige Schwingungen ausführen.

Hierbei bleibt, wenigstens für den Grenzfall unendlich großer Wellenlängen (d. h. $k = 0$), der Zellenschwerpunkt in Ruhe. Für $k \neq 0$ ist dies nur im Fall der „Entkopplung“ möglich, wenn also die Bewegung des Zellenschwerpunktes und die Bewegungen der Zellenpartikel für sich beschrieben werden können.

Auf den Fall $k = 0$ für $\omega \neq 0$ wurde bereits als translatorische Schwingung der starren Untermedien gegeneinander hingewiesen.

Für das Auftreten der optischen Zweige sind die Größen $\iota^{\alpha\beta}$ maßgebend, d. h. das Vorhandensein der Tensoren $T_{ik}^{\alpha\beta}$ (bzw. $\iota^{\alpha\beta} \delta_{ik}$ bei Isotropie) ist eine physikalische Notwendigkeit. Es wurde auch schon erwähnt, daß ohne diese Größen das Gesamtgitter in seine Teilgitter auseinanderfallen würde.

Der Aufbau des Dispersionsgesetzes zeigt mit dem Auftreten der optischen Zweige die befriedigende Tatsache, daß Kontinuumstheorie und Gittertheorie den gleichen physikalischen Sachverhalt liefern.

Die bisher in diesem Abschnitt dargelegten Beziehungen sollen nun in einem einfachen Beispiel, nämlich für den Fall $n = 2$, näher erläutert werden.

Wegen der Symmetriebedingungen (5.1) muß — wenn man jetzt die Indizes α, β gleichfalls unten schreibt — wegen $\delta_{ik} = \delta_{ki}$

$$\iota_{12} = \iota_{21}, \quad \lambda_{12} = \lambda_{21}, \quad \mu_{12} = \mu_{21} \quad (6.9)$$

außerdem wegen der Invarianzbedingungen (3.15)

$$\iota_{11} = -\iota_{12}, \quad \iota_{22} = -\iota_{21} = \iota \quad (6.10)$$

sein. Es geht also nur eine Größe ι ein.

Die beiden Bewegungsgleichungen lauten somit in Vektorschreibweise:

$$\begin{aligned} \rho_1 \ddot{\mathbf{u}}_1 + \iota (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - (\lambda_{11} + \mu_{11}) \text{grad div } \mathbf{u}_1 - \mu_{11} \Delta \mathbf{u}_1 \\ - (\lambda_{12} + \mu_{12}) \text{grad div } \mathbf{u}_2 - \mu_{12} \Delta \mathbf{u}_2 = 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

und

$$\begin{aligned} \rho_2 \ddot{\mathbf{u}}_2 + \iota (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) - (\lambda_{22} + \mu_{22}) \text{grad div } \mathbf{u}_2 - \mu_{22} \Delta \mathbf{u}_2 \\ - (\lambda_{12} + \mu_{12}) \text{grad div } \mathbf{u}_1 - \mu_{12} \Delta \mathbf{u}_1 = 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\lambda_{\alpha\beta} + 2\mu_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}^{\text{long}} = \eta_{\alpha\beta}^l, \quad \mu_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}^{\text{trans}} = \eta_{\alpha\beta}^t, \quad (6.13)$$

so erhält man für die Hauptdeterminante, deren Verschwinden gefordert werden muß, die Gleichung (6.14).

$$\begin{vmatrix}
 -\varrho_1 \omega^2 + \iota + \eta_{11}^l k^2 & 0 & 0 & -\iota + \eta_{12}^l k^2 & 0 & 0 \\
 0 & -\varrho_1 \omega^2 + \iota + \eta_{11}^t k^2 & 0 & 0 & -\iota + \eta_{12}^t k^2 & 0 \\
 0 & 0 & -\varrho_1 \omega^2 + \iota + \eta_{11}^t k^3 & 0 & 0 & -\iota + \eta_{12}^t k^2 \\
 -\iota + \eta_{12}^l k^2 & 0 & 0 & -\varrho_2 \omega^2 + \iota + \eta_{22}^l k^2 & 0 & 0 \\
 0 & -\iota + \eta_{12}^t k^2 & 0 & 0 & -\varrho_2 \omega^2 + \iota + \eta_{22}^t k^2 & 0 \\
 0 & 0 & -\iota + \eta_{12}^t k^2 & 0 & 0 & -\varrho_2 \omega^2 + \iota + \eta_{22}^t k^2
 \end{vmatrix} = 0$$

Joachim Baumgarte

(6.14)

Man sieht, daß die Hauptdeterminante (6.14) in drei Teildeterminanten des gleichen Aufbaus

$$\begin{vmatrix} -\varrho_1 \omega^2 + \iota + \eta_{11} k^2 & -\iota + \eta_{12} k^2 \\ -\iota + \eta_{12} k^2 & -\varrho_2 \omega^2 + \iota + \eta_{22} k^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.15)$$

zerfällt, wobei für $\eta_{\alpha\beta}$ in einer Determinante $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}^l$ und in den beiden anderen $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}^t$ gesetzt werden muß.

Die Hauptdeterminante und damit auch die Teildeterminanten sind symmetrisch. Dies bedeutet: Alle Eigenwerte ω^2 sind reell, denn alle Materialkonstanten und auch die Wellenzahl k sind ebenfalls reell.

Die drei Teildeterminanten liefern drei Dispersionsgleichungen — davon eine mit $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}^l$ und zwei weitere (identische) mit $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}^t$ — der Form

$$\begin{aligned} \varrho_1 \varrho_2 \omega^4 - [\eta_{11} \varrho_2 + \eta_{22} \varrho_1] \omega^2 k^2 + [\eta_{11} \eta_{22} - (\eta_{12})^2] k^4 \\ - (\varrho_1 + \varrho_2) \iota \omega^2 + (\eta_{11} + \eta_{22} - 2 \eta_{12}) \iota k^2 = 0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Jede Dispersionsfunktion (6.16) läßt sich also durch eine Hyperbel (nur reelle Eigenwerte) im ω^2 - k^2 -Diagramm darstellen (Abb. 2a und 2b).

Aus (6.16) ist zu ersehen, daß alle optischen Zweige für $k = 0$ (hier bei Isotropie) den gleichen Wert

$$\omega_{\text{opt.}}(0) = \left(\frac{\iota}{\varrho_{\text{red}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.17)$$

mit

$$\frac{1}{\varrho_{\text{red}}} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \quad (6.18)$$

annehmen.

Die Schwingungsamplituden der beiden Zellenpartikel verhalten sich in diesem Fall wie $1 : \left(-\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \right)$ (Impulserhaltung), während sie sich bei den akustischen Zweigen für $k = 0$ und damit auch $\omega = 0$ wie $1 : 1$ verhalten. Der Verlauf der einzelnen Zweige im Bereich der Wellenzahlen

$$0 \leq |k| \leq k_D = \frac{2\pi}{a} \quad (6.19)$$

mit a = Zellenabstand

kann zu zwei verschiedenen Haupttypen gehören (Abb. 2a, b).

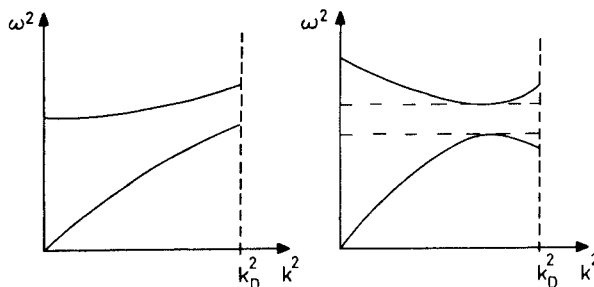


Abb. 2a

Abb. 2b

Es sind nur die longitudinalen Zweige gezeichnet

Der interessantere ist der Typ nach Abb. 2b. Hier existieren zwei Frequenzen, bei denen die Gruppengeschwindigkeit $\frac{d\omega}{dk} = 0$ wird, weil $\frac{d^2(\omega^2)}{d(k^2)} = 0$ ist, und damit in der spektralen Verteilung

$$N(\omega) d\omega = \frac{3N}{k_D^3} \sum_{s=1}^3 k_s^2 \frac{dk_s}{d\omega_s} d\omega_s \quad (6.20)$$

(mit N als Gesamtzahl aller Zellen) bzw. (8.5)

zwei Spektrallinien bei diesen Frequenzen auftreten. Außerdem nehmen die Frequenzen des akustischen Zweiges mit zunehmenden $|k|$ wieder ab. Die Einschränkung (5) verlangt nun gerade, daß alle Frequenzen, die zu den Wellenzahlen des begrenzten Gesamtgebietes (6.19) gehören, reell sein müssen. Das bedeutet: Alle ω^2 des Gesamtgebietes der Wellenzahlen (6.19) müssen positiv sein.

Die Tatsache, daß Frequenzbereiche bestimmter akustischer Zweige, die zu Wellenzahlen in der Nähe der Grenzwellenzahl k_D gehören, relativ kleine Werte annehmen können, hat Konsequenzen für die Versetzungstheorie. Auf sie wird in Abschnitt 8 eingegangen. Dort wird auch gezeigt, wie bei zusätzlicher Berücksichtigung der Wärmebewegung der Partikel das Gesamtkontinuum instabil sein kann, obwohl die Einschränkung 5) erfüllt ist.

Nun wird als Sonderfall des Gleichungssystems (3.14) der Fall der „Entkoppelung“ betrachtet. Führt man als neue Veränderliche die Zellschwerpunktsverschiebung \mathbf{u} und die relative Partikelverschiebung \mathbf{w} ein, mit

$$\varrho_1 \mathbf{u}_1 + \varrho_2 \mathbf{u}_2 = (\varrho_1 + \varrho_2) \mathbf{u} = \varrho \mathbf{u}; \quad \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{w}, \quad (6.21)$$

so erhält man zwei entkoppelte Gleichungen, welche die Schwerpunktsbewegung und die „Spreizung“ der Zelle getrennt beschreiben:

$$\begin{aligned} \hat{\varrho} \ddot{\mathbf{u}} - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} &= 0 \\ \hat{\varrho} \ddot{\mathbf{w}} + \iota \mathbf{w} - (\lambda + \hat{\mu}) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} - \hat{\mu} \Delta \mathbf{w} &= 0 \end{aligned} \quad (6.22)$$

mit $\hat{\varrho} = \varrho_{\text{red}}$ nach (6.18).

Nach dem bisher Dargelegten kann man die Zweige im ω^2 - k^2 -Diagramm sofort angeben, wobei in den Abb. 3a und 3b wieder die beiden Haupttypen gezeichnet sind (z. B. für die longitudinalen Zweige).

Bei dem in der Abb. 3a angegebenen (zusätzlichen) Sonderfall gibt der gesamte optische Zweig nur eine Spektrallinie wieder. Die Phasengeschwindigkeit ist hier im gesamten optischen Wellenzahlbereich gleich Null (Einsteins Ansatz zur Behandlung der spezifischen Wärme).

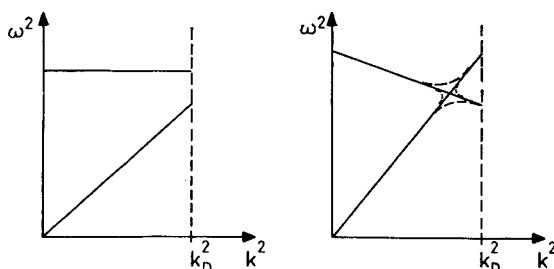


Abb. 3a

Abb. 3b

Es sind nur die longitudinalen Zweige gezeichnet

Zu dem in der Abb. 3b angegebenen Fall ist folgendes zu sagen: Ändert man die in den Gleichungen (6.11) und (6.12) vorkommenden Konstanten etwas ab, jedoch ohne die zu fordernden Symmetrien zu verletzen, so daß nun nicht mehr der Sonderfall (6.22) vorliegt, so geben die gestrichelten Linien die Dispersionsfunktion wieder. Die beiden sich schneidenden Geraden gehen so in Hyperbeln über, daß nur reelle ω^2 zu jedem reellen k^2 gehören.

Die gestrichelte Kurve führt also auf den in Abb. 3b behandelten Fall.

Diese Überlegung gestattet es, kompliziertere Fälle aus dem einfachen Sonderfall der Entkopplung herzuleiten: Man geht an der Überschneidungsstelle von einem Teil des akustischen Zweiges in den benachbarten anderen Teil des optischen Zweiges über und erhält so den neuen akustischen Zweig. Entsprechendes gilt für den neuen optischen Zweig.

Die gepunktete Verbindung in Abb. 4a ergibt sich aus folgender Überlegung: In der Reihenentwicklung (2.1) wurden Glieder höherer Ordnung vernachlässigt. Diese Glieder erfassen u. a. die Druck- und Temperaturabhängigkeit der elastischen Größen. Denkt man sich die Glieder höherer Ordnung nicht vernachlässigt, aber doch sehr klein, so kann die Abwandlung der Überschneidung in die punktierte Verbindung möglich sein. Dies entspricht einem Zerreißen des Gitters (ω^2 wird komplex) zumindest in kleinsten Dimensionen. Diese Betrachtungen können eventuell auch für eine Theorie der Gitterdefekte eine Rolle spielen.

Es sollen jetzt nochmals die beiden wichtigen — gegenüber der normalen Elastizitätstheorie ($n = 1$) neuen — Punkte, die bereits der einfache Fall $n = 2$ bei Isotropie und Zentrosymmetrie liefert, hervorgehoben werden:

- a) Es können für $k \rightarrow k_D$ relativ kleine Frequenzen vorhanden sein (siehe Abschnitt 8).
- b) Die Überschneidung zweier „entkoppelter“ Zweige ermöglicht allgemeinere Aussagen bei komplizierteren Fällen.

Die zu Beginn dieses Abschnittes gemachten, das Problem vereinfachenden Voraussetzungen sollen jetzt fallen gelassen und das Dispersionsgesetz für den allgemeinen Fall abgeleitet werden.

Ist \mathbf{n} ein Einheitsvektor in Bewegungsrichtung der ebenen Welle, so hat diese die Form

$$u_i^{\mathbf{n}} = \dot{u}_i^{\mathbf{n}} e^{i(k \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

bzw.

$$u_R = \dot{u}_R e^{i(k \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (6.23)$$

wobei k als positiv vorausgesetzt wird, damit der Einheitsvektor \mathbf{n} die Bewegungsrichtung eindeutig festlegt.

Nach Einsetzen von (6.23) in (3.14) bzw. (5.7) bekommt man die Beziehung (für den homogenen Fall)

$$[\tilde{\Phi}_{RS} - \rho_{RS} \omega^2] \dot{u}_S = 0, \quad (6.24)$$

welche das Verschwinden der Determinante

$$\det \{ \tilde{\Phi}_{RS} - \varrho_{RS} \omega^2 \} = 0 \quad (6.25)$$

bedingt. Dabei hat der Tensor $\tilde{\Phi}_{RS} = \tilde{\Phi}_{RS}(k, \mathbf{n})$ die Gestalt:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{RS} = & T_{(RS)} + i k T_{[RS]j} n_j - k^2 T_{(RS)(jl)} n_j n_l \\ & - i k^3 T_{[RS](jlm)} n_j n_l n_m + k^4 T_{(RS)(jlmn)} n_j n_l n_m n_n + \dots \end{aligned} \quad (6.26)$$

Die Matrix $\tilde{\Phi}_{RS}$ ist also hermetisch, d. h. die sich aus (6.25) ergebenden Eigenwerte ω^2 sind für positive ϱ^α reell. Dies ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für die Stabilität des Gesamtkontinuums. Die charakteristische Gleichung von (6.25) führt auf ein Polynom $H(\omega^2, k^2) = 0$ vom Grad $3n$ in ω^2 .

Bei Zentrosymmetrie ist die Anzahl der Ableitungen für jedes Glied stets gerade und daher der Amplitudenvektor \hat{u}_S reell; d. h. die Partikel schwingen in oder gegen Phase.

Beim Fehlen von Zentrosymmetrie ist der Amplitudenvektor \hat{u}_S im allgemeinen komplex, d. h. die Partikel schwingen in bestimmter Weise phasenverschoben gegeneinander.

Eine Aufteilung in longitudinale und transversale Wellen ist jetzt nicht mehr möglich.

Die Determinante (6.25) legt auch hier nach (3.15) fest, daß 3 akustische Zweige vorhanden sein müssen. Die restlichen $3(n-1)$ Zweige sind optische Zweige.

Es dürfen nicht weniger sein, weil sonst das Gesamtkontinuum von vornherein instabil ist.

Zu jedem k im Gesamtwellenzahlbereich (6.19) dürfen (außer für die akustischen Zweige mit $\omega(0) = 0$) nur positive ω^2 für jede Richtung \mathbf{n} gehören. Dies ist eine Bedingung für die Materialgrößen, um die Stabilität des Gesamtmediums zu gewährleisten.

Jetzt soll noch einmal auf den Fall $n = 2$ zurückgekommen werden, wobei die $T_{ikj}^{\alpha\beta}$ bzw. $T_{[RS]j}$ nicht Null gesetzt werden sollen.

Zunächst hierzu noch einige Vorbemerkungen: Wie bereits in (4.10) erwähnt, sind alle $T_{[i(k)j]}^{\alpha\beta} = 0$. Ebenfalls sind auch alle $T_{(i[k]j)}^{\alpha\beta} = 0$.

Es existieren also nur eine Größe $T_{[ikj]}^{\alpha\beta} = \xi^{\alpha\beta} e_{ikj}$ und 10 Größen $T_{(ikj)}^{\alpha\beta}$.

Aus den Gleichungen (3.18) und (4.10) folgt

$$\sum_{\beta} T_{[ikj]}^{\alpha\beta} = 0 \quad (6.27)$$

und aus dem Grenzübergang $n \rightarrow 1$

$$\sum_{\alpha, \beta} T_{ikj}^{\alpha\beta} = 0. \quad (6.28)$$

Dies bedingt:

$$\sum_{\alpha, \beta} T_{(ikj)}^{\alpha\beta} = 0. \quad (6.29)$$

Für $n = 2$ ergibt sich für die Bewegungsgleichungen, wenn man zu Gleichung (6.22) den isotropen Anteil der ersten räumlichen Ableitung der Verschiebung hinzufügt und dabei den Sonderfall der Entkopplung (entsprechend (6.22)) behandelt:

$$\varrho \ddot{u} - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u - \mu \Delta u = 0 \quad (6.30)$$

$$\hat{\varrho} \ddot{w} + \iota w + \xi \operatorname{rot} w - (\hat{\lambda} + \hat{\mu}) \operatorname{grad} \operatorname{div} w - \hat{\mu} \Delta w = 0 \quad (6.31)$$

mit $\hat{\varrho} = \varrho_{red}$ (nach (6.18)).

Man sieht, daß das zweite und dritte Glied in (6.31) innere Kräfte des Gesamtgitters darstellen, und daher in der Schwerpunktsgleichung (6.30) nicht erscheinen.

Gleichung (6.30) liefert den longitudinalen Zweig und die (nur im Sonderfall der Entkopplung) zusammenfallenden transversalen akustischen Zweige, die alle lineare Dispersion zeigen. Gleichung (6.30) bringt also für sich das Ergebnis der normalen Elastizitätstheorie.

Dagegen führt Gleichung (6.31), welche die Spreizungsbewegung in der Zelle beschreibt, auf folgende Determinante, deren Verschwinden gefordert werden muß:

$$\begin{vmatrix} -\hat{\varrho} \omega^2 + (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) k^2 + \iota & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{\varrho} \omega^2 + \hat{\mu} k^2 + \iota & -i \xi k \\ 0 & i \xi k & -\hat{\varrho} \omega^2 + \hat{\mu} k^2 + \iota \end{vmatrix} = 0 \quad (6.32)$$

Der longitudinale optische Zweig tritt entkoppelt auf. Für seine Frequenz erhält man:

$$\omega_l^{\text{opt}} = (\hat{\varrho})^{-\frac{1}{2}} (\iota + (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) k^2)^{\frac{1}{2}} \quad (6.33)$$

mit dem Amplitudenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot |\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2|$.

Für die jetzt verschiedenen transversalen optischen Zweige (\pm) ergibt sich:

$$\omega_{l(\pm)}^{\text{opt}} = (\hat{\varrho})^{-\frac{1}{2}} (\iota + \hat{\mu} k^2 \pm \xi \cdot k)^{\frac{1}{2}} \quad (6.34)$$

mit dem Amplitudenvektor $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \cdot |\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_2|$.

Es existieren also nur *zirkular polarisierte* transversale optische Wellen. Die beiden Zellenteilchen führen Kreisbewegungen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit unter Erhaltung des ruhenden Massenmittelpunktes aus. Die Normale

der Kreisfläche zeigt in Richtung der Wellenausbreitung. Zur gleichen Wellenzahl $|k|$ gehören je nach Drehsinn zwei verschiedene Frequenzen und damit auch zwei verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeiten.

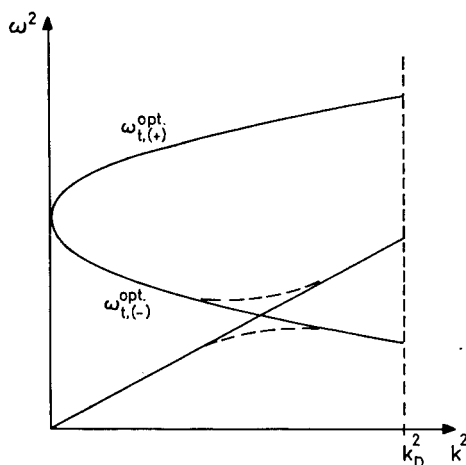


Abb. 4. Es sind nur die transversalen Zweige gezeichnet. Die beiden optischen transversalen Zweige geben den Fall $\hat{\mu} = 0$ an

Aus Abb. 4 ist zu ersehen, daß $\omega_{t,(-)}^{\text{opt.}}$ für $k \rightarrow k_D$ kleine Werte annehmen kann. Damit kann auch der Fall der Überschneidung mit den beiden transversalen akustischen Zweigen eintreten.

Nach dem in Abschnitt 8 folgenden Betrachtungen vermag ein großer Wert von ξ die Stabilität des Gitters zu beeinträchtigen. Außerdem kann durch kleine Abänderung der Materialkonstanten und damit Fortfall der Entkoppelung ein anderer Verlauf der akustischen und optischen Zweige (in Abb. 4 gestrichelt) auftreten.

Nun soll der Einfluß der Größen $T_{(ikj)}^{\alpha\beta}$ für $n = 2$ untersucht werden. Die Symmetriebedingungen fordern, daß

$$T_{(ikj)}^{11} = T_{(ikj)}^{22} = 0 \quad (6.35)$$

und der Grenzübergang $n \rightarrow 1$ verlangt, daß

$$T_{(ikj)}^{12} = -T_{(ikj)}^{21} \quad (6.36)$$

sein muß. Durch Hinzunahme dieser symmetrischen Glieder erhält man immer den Fall der Anisotropie.

Folgendes Beispiel werde nun behandelt. Es seien nur die Größen

$$T_{111}^{12} = T_{222}^{12} = T_{333}^{12} = -T_{111}^{21} = -T_{222}^{21} = -T_{333}^{21} = \chi \quad (6.37)$$

von Null verschieden. Diese Glieder werden den Gleichungen (6.11) und (6.12) zugefügt. Damit sind die Bewegungen in den drei Koordinatenrichtungen x_1, x_2, x_3 gleichwertig. Der Ansatz

$$u_i^\alpha = \dot{u}_i^\alpha e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad (6.38)$$

wirkt sich nur auf die longitudinalen Zweige aus. Es ändert sich daher nur die Teildeterminante (entsprechend (6.15)) für den longitudinalen Anteil:

$$\begin{vmatrix} -\varrho_1 \omega^2 + \iota + \eta_{11}^l k^2 & -\iota + \eta_{12}^l k^2 + i\chi \\ -\iota + \eta_{12}^l k^2 - i\chi k & -\varrho_2 \omega^2 + \iota + \eta_{22}^l k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.39)$$

Nimmt man jetzt zur Vereinfachung an, daß $\varrho_2 = \varrho_1$ und $\eta_{22}^l = \eta_{11}^l$ ist, so erhält man für die Frequenzen:

$$\begin{aligned} \omega_l^{\text{akust.}} &= (\varrho_1)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \iota + \eta_{11}^l k^2 - [(\iota - \eta_{12}^l k^2)^2 + \chi^2 k^2]^{\frac{1}{2}} \right\}; \\ \omega_l^{\text{opt.}} &= (\varrho_1)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \iota + \eta_{11}^l k^2 + [(\iota - \eta_{12}^l k^2)^2 + \chi^2 k^2]^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Die beiden Partikel der Zelle schwingen phasenverschoben in Wellenausbreitungsrichtung.

Es ist nicht möglich, bei Anwesenheit der $T_{(ikj)}^{\alpha\beta}$ Schwerpunkts- und Zellenstreuung zu entkoppeln.

Man kann die Materialkonstanten in (6.40) so abstimmen, daß die Frequenzen des akustischen Zweiges nach Durchlaufen eines Maximums (Spektrallinie) für $k \rightarrow k_D$ relativ kleine Werte annehmen. Das ist der Fall, wenn man z. B. η_{12}^l negativ und $\eta_{11}^l > -\eta_{12}^l$ wählt.

Die Anwesenheit der Größen $T_{(ikj)}^{\alpha\beta}$ kann, wie in Abschnitt 8 gezeigt wird, auch die Stabilität des Gesamtmediums beeinträchtigen.

7. Das Cosserat-Kontinuum

Die Zahl der Freiheitsgrade wird von $3n$ praktisch auf 6 reduziert, wenn die Bindungskräfte zwischen den Partikeln der Elementarzelle sehr viel stärker als die Bindungskräfte zwischen den benachbarten Zellen werden. In diesem Fall bilden die Zellenpartikel praktisch einen starren Elementarkörper. Dies ist die Überlegung, die der Cosserat-Theorie [3, 11, 29, 30, 31] zugrunde liegt. Die Konsequenzen für das Wellenspektrum sind bei diesem Spezialfall folgende: Neben den drei akustischen Zweigen treten drei optische Zweige auf, welche die Cosserat-Rotationswellen repräsentieren. Die restlichen $3(n-2)$ -optischen Zweige besitzen so extrem hohe Frequenzen und damit auch so extrem hohe Energien, daß sie vernachlässigt werden können.

Der Übergang vom $3n$ -dimensionalen Kontinuum zum 6-dimensionalen Cosserat-Kontinuum wird in folgender Weise vorgenommen: Durch zusammenfassende Linearkombination werden die n Vektorgleichungen auf zwei Vektor-

gleichungen reduziert. Davon repräsentiert eine Gleichung die Beziehung für die Volumkräfte, die andere die Beziehung für die Volummomente.

Die n Verschiebungsvektoren u_i^α sind im Cosserat-Fall nicht mehr unabhängig voneinander, sondern gehorchen der Beziehung

$$u_i^\alpha = u_i + e_{i l s} \varphi_l a_s^\alpha. \quad (7.1)$$

Hierbei ist u_i die Verschiebung des Zellenschwerpunktes, φ_l der Drehwinkel und a_s^α der Vektor, der vom Zellenschwerpunkt zur i -ten Partikel der Zelle zeigt. Der Vektor a_s^α ist während der Bewegung nicht konstant. Es bleibt zwar seine Länge erhalten, doch seine Richtung ist variabel. Um auch weiterhin eine lineare Theorie beizubehalten, denkt man sich den Vektor a_s^α in Reihe entwickelt und diese mit dem konstanten Glied (Gleichgewichtslage) abgebrochen. Im folgenden wird also a_s^α als konstanter Vektor angesehen.

Wird Gleichung (7.1) in das System der Bewegungsgleichungen (3.1) eingesetzt und die Summe aller Vektorgleichungen über α gebildet, so erhält man die Beziehung für die Kraftdichte:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_\alpha \varrho^\alpha \right) u_i + \left(\sum_\alpha \varrho^\alpha e_{i l s} a_s^\alpha \right) \varphi_l + \sum_{\alpha, \beta} \int dV' \Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_k \\ & + \sum_{\alpha, \beta} \int dV' \Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e_{p k s} a_s^\alpha \varphi_k(\mathbf{r}') + \sum_\alpha \varrho^\alpha F_i^\alpha(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Die Schwerpunktsbeziehung liefert

$$\sum_\alpha \varrho^\alpha e_{i l s} a_s^\alpha = 0. \quad (7.3)$$

Setzt man außerdem

$$\begin{aligned} \sum_\alpha \varrho^\alpha &= \varrho \\ \sum_{\alpha, \beta} \Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \Phi_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \sum_{\alpha, \beta} \Phi_{ip}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e_{p k s} a_s^\alpha &= \bar{\Phi}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \sum_\alpha \varrho^\alpha F_i^\alpha(\mathbf{r}) &= \varrho F_i(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (7.4)$$

So erhält man

$$\varrho \ddot{u}_i + \int dV' \Phi_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_k + \int dV' \bar{\Phi}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varphi_k(\mathbf{r}') = \varrho F_i(\mathbf{r}). \quad (7.5)$$

Multipliziert man die Bewegungsgleichung des Teilmediums α mit $e_{p i q} a_q^\alpha$ und bildet dann die Summe aller so erhaltenen Gleichungen über α , so ergibt sich die Beziehung für die Volummomente:

$$\begin{aligned} & \sum_\alpha e_{p i q} a_q^\alpha \left\{ \varrho^\alpha \ddot{u}_i(\mathbf{r}) + \varrho^\alpha e_{i l s} a_s^\alpha \ddot{\varphi}_l(\mathbf{r}) \right. \\ & + \sum_\beta \int dV' \left[\Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_k(\mathbf{r}') + \Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e_{k l s} a_s^\alpha \varphi_l(\mathbf{r}') \right] \\ & \left. - \varrho^\alpha F_i^\alpha(\mathbf{r}) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Es ist dabei wieder

$$\sum_{\alpha} \varrho^{\alpha} e_{ptq} a_q^{\alpha} = 0. \quad (7.3)$$

Außerdem wird gesetzt

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \varrho^{\alpha} e_{ptq} e_{ils} a_q^{\alpha} a_s^{\alpha} &= \vartheta_{pl} \\ \sum_{\alpha, \beta} e_{ptq} a_q^{\alpha} \Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \Psi_{pk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \sum_{\alpha, \beta} e_{ptq} a_q^{\alpha} \Phi_{ik}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e_{kls} a_s^{\alpha} &= \bar{\Psi}_{pl} \\ \sum_{\alpha} e_{ptq} a_q^{\alpha} \varrho^{\alpha} F_i^{\alpha}(\mathbf{r}) &= M_p(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Somit erhält man nach Umbenennung der stummen Indizes:

$$\begin{aligned} \vartheta_{ik} \ddot{\varphi}_k + \int dV' \Psi_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_k(\mathbf{r}') \\ + \int dV' \bar{\Psi}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varphi_k(\mathbf{r}') = M_i(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Die Gleichungen (7.5) und (7.8) müssen jetzt noch invariant gegen Verschiebung und Drehung sein.

Zunächst liefert die Reihenentwicklung des Kerns $\Phi_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ nach (3.12), (3.15) und (4.10)

$$\Phi_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = T_{ikjl} \partial_j \partial_l \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + t_{ikjl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (7.9)$$

Der Tensor $\Phi_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ erfüllt also für sich beide Invarianzbedingungen. Daher ist nur noch

$$\int dV' \bar{\Phi}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (7.10)$$

als Invarianz der Kräftegleichung (7.5) gegenüber Drehung zu fordern.

Die zu verlangende Invarianz der Momentengleichung (7.8) gegenüber Verschiebung ergibt

$$\int dV' \Psi_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (7.11)$$

und gegenüber Drehung bedingt, wegen

$$\varphi_k = \frac{1}{2} e_{kpq} \partial_p u_q \quad (7.12)$$

(d. h. φ_k wird zur mittleren Drehung des Verschiebungsfeldes)

$$\int dV' \Psi_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_k(\mathbf{r}') + \frac{1}{2} \int dV' \bar{\Psi}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e_{kpq} \partial_p u_q = 0. \quad (7.13)$$

Viel übersichtlicher werden die Gleichungen (7.5) und (7.8) unter Berücksichtigung der Invarianzbedingungen (7.9), (7.10), (7.11), (7.12) und (7.13) nach Durchführung einer Fourier-Entwicklung entsprechend Gleichung (3.10):

$$\begin{aligned} \varrho \ddot{u}_i + T_{ikjl} u_{k,jl} + \int dV' t_{ikjl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_{k,jl}(\mathbf{r}') \\ + \bar{T}_{ikj} \varphi_{k,j} + \int dV' \bar{t}_{ikj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varphi_{k,j}(\mathbf{r}') = \varrho F_i \end{aligned} \quad (7.14)$$

und

$$\begin{aligned} \vartheta_{ik} \dot{\varphi}_k + C_{ik} \varphi_k + \int dV' \bar{c}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varphi_k(\mathbf{r}') \\ + \bar{C}_{ikj} u_{k,j} + \int dV' \bar{c}_{ikj}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') u_{k,j}(\mathbf{r}') = M_i \end{aligned} \quad (7.15)$$

mit

$$\frac{1}{2} C_{ip} e_{pkj} = \hat{C}_{ikj} \quad (7.16)$$

nach Gleichung (7.13).

Man kann sich leicht ein noch allgemeineres Cosserat-Kontinuum vorstellen: Von den n Partikeln der Zelle sollen einzelne Gruppen von Teilchen mehrere kleine starre Elementarkörper bilden, während außerdem noch weitere einzelne Massenpunkte zur Zelle gehören können.

Durch zusammenfassende Linearkombination derjenigen Vektorgleichungen, die die Bewegung der Partikel des jeweiligen starren Körpers bestimmen, kann man die Zahl der Freiheitsgrade geeignet reduzieren, so daß nun die Bewegung jedes starren Elementarkörpers durch zwei Vektorgleichungen (für Kraftdichte und Momentendichte) ausgedrückt wird. Dabei treten in jeder Kraft- oder Momentengleichung im allgemeinen alle Verschiebungs- bzw. Drehvektoren auf.

Die Behandlung eines allgemeinen Cosserat-Kontinuums in dieser Weise ist sinnvoll, wenn das Wellenspektrum folgendes Aussehen hat: Eine bestimmte Anzahl der optischen Zweige zeigt, verglichen mit den anderen optischen — und natürlich auch den drei akustischen — Zweigen, eine extrem hohe Lage der Frequenzen.

8. Das Problem der spezifischen Wärme

Bei der Berechnung der spezifischen Wärme legte *P. Debye* im Jahre 1912 die normale Elastizitätstheorie zugrunde. Seine Überlegungen sollen nun durch die hier abgeleitete Theorie erweitert werden, wobei jetzt auch der Anteil der optischen Zweige an der spezifischen Wärme berücksichtigt wird.

Bezeichnet man mit N die Gesamtzahl der Zellen, mit V_c das Zellenvolumen im undeformierten Zustand, so ergibt sich für die Zahl der Eigenschwingungen dz_s im Wellenzahlintervall dk_s des Zweiges s die Beziehung

$$dz_s = \frac{4 \pi N V_c}{(2 \pi)^3} k_s^2 dk_s \quad s = 1, 2, 3, \dots 3n. \quad (8.1)$$

Die Wellenzahlen k_s laufen von $k_s = 0$ bis zur Debye-Grenze $k_D = \frac{\pi}{a}$ (a = Zellenabstand). Dabei wird k_D durch folgende Bezeichnung festgelegt: Die Gesamtzahl der Eigenschwingungen z_s des Zweiges s ist gleich der Zellenanzahl N .

$$\int dz_s = N = \frac{4 \pi N V_c}{(2 \pi)^3} \int_0^{k_D} k_s^2 dk_s = \frac{4 \pi}{3 (2 \pi)^3} N V_c k_D^3. \quad (8.2)$$

Damit erhält man

$$k_D = 2\pi \left(\frac{3}{4\pi V_c} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (8.3)$$

Ferner ist

$$Z_s(k) = \frac{dz_s}{dk} = \frac{3N}{(k_D)^3} k^2. \quad (8.4)$$

Die Gesamtspektralverteilung $W(\omega) d\omega$ hat dann, weil k_s durch die Dispersionsbeziehung $k_s = k_s(\omega)$ vorliegt und damit auch $Z_s = Z_s(\omega)$ gegeben ist, bei Isotropie die Form

$$W(\omega) d\omega = \sum_{s=1}^{3n} Z_s(\omega) \frac{dk_s}{d\omega} d\omega \quad (8.5)$$

mit

$$\int W(\omega) d\omega = 3nN. \quad (8.6)$$

Da die Spektralverteilung W als Funktion von ω angegeben wird, ist zu beachten, daß zu jedem ω_s eine andere *Debye*-Grenze $\omega_{s,D}$ gehört, welche die Dispersionsfunktion $\omega_s(k)$ an der Stelle $k = k_D$ liefert.

Zu jeder Frequenz $\omega_s(k)$ der 3 n Zweige s gehört bei Isotropie die Schwingungsenergie $E_s(k)$.

$$E_s(k) = \frac{1}{2} \hbar \omega_s + \frac{\hbar \omega_s(k)}{\exp \left\{ \frac{\hbar \omega_s(k)}{\kappa \vartheta} \right\} - 1}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad (8.7)$$

wobei h das *Plancksche* Wirkungsquantum, κ die Boltzmann-Konstante und ϑ die absolute Temperatur ist.

Die temperaturunabhängige Nullpunktsenergie $\frac{1}{2} \hbar \omega_s$ liefert keinen Beitrag zur spezifischen Wärme.

Man erhält für den Anteil der Inneren Energie U_s , der zum Zweig s gehört, den Ausdruck

$$U_s = \int_0^{k_D} dk Z_s(k) E_s(k). \quad (8.8)$$

Für die gesamte Innere Energie U ergibt sich:

$$U = \sum_{s=1}^{3n} U_s = \frac{3N\kappa\vartheta}{(k_D)^3} \sum_{s=1}^{3n} \int_0^{k_D} dk k^2 \frac{\frac{\hbar \omega_s(k)}{\kappa\vartheta}}{\exp \left\{ \frac{\hbar \omega_s(k)}{\kappa\vartheta} \right\} - 1}. \quad (8.9)$$

Hierbei wurde die Nullpunktsenergie vernachlässigt. Zur Lösung des Integrals (8.9) ist es zweckmäßig, folgende Substitutionen einzuführen:

$$y_s = \frac{\hbar \omega_s}{\kappa \vartheta}, \quad x = \frac{\hbar k}{\kappa \vartheta}, \quad x_D = \frac{\hbar k_D}{\kappa \vartheta}. \quad (8.10)$$

Dann erhält man:

$$U = \frac{3 N}{(\hbar k_D)^3} (\kappa \vartheta)^4 \sum_{s=1}^{3n} \int_{x=0}^{x_D} dx x^2 \frac{y_s(x)}{e^{y_s(x)} - 1}. \quad (8.11)$$

Die Integration über k bzw. x kann im Prinzip ohne Schwierigkeiten durchgeführt werden, denn die Dispersionsbeziehung legt $\omega_s(k)$ und damit $y_s(x)$ fest.

Die Bedingung, daß die Integration zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=x_D$ im Reellen erfolgt, ist gleichzeitig die notwendige Bedingung für die Stabilität des Gesamtgitters. Im ganzen Integrationsbereich

$$0 \leq k \leq k_D \quad (6.19)$$

bzw.

$$0 \leq x \leq x_D$$

ist entsprechend Einschränkung 5) ω_s^2 positiv und damit $\omega_s = +\sqrt{\omega_s^2}$ sowie x positiv.

Es sollen jetzt die Grenzfälle $\vartheta \rightarrow 0$ und $\vartheta \rightarrow \infty$ untersucht werden.

Fall $\vartheta \rightarrow 0$

Für sehr kleine Temperaturen, also sehr große x geben nur die akustischen Zweige im Bereich sehr kleiner Frequenzen einen Beitrag zur Integration. Der Anteil der höheren Frequenzen, und damit auch der Anteil aller optischen Zweige, liefert wegen der Exponentialfunktion im Nenner [(8.9) bzw. (8.11)] praktisch keinen Beitrag zur Inneren Energie. Dies bedeutet: Man kann $x \rightarrow \infty$ gehen lassen und erhält so für das Integral (mit jetzt festen Grenzen) einen festen Zahlenwert.

Damit ergibt sich $U \sim \vartheta^4$.

Das *Debyesche* ϑ^3 -Gesetz für die spezifischen Wärmen bei sehr kleinen Temperaturen tritt also auch in dieser Theorie auf.

Fall $\vartheta \rightarrow \infty$

Für sehr hohe Temperaturen, also für sehr kleine x , ergibt sich nach Reihenentwicklung von (8.9)

$$U = N \kappa \vartheta \left\{ \sum_{s=1}^{3n} \frac{\frac{\hbar \omega_{s,0}}{\kappa \vartheta}}{\exp \left\{ \frac{\hbar \omega_{s,0}}{\kappa \vartheta} \right\} - 1} \right\}. \quad (8.12)$$

Hierbei bedeutet $\omega_{s,0} = \omega_s (k=0)$, d. h. die Reihenentwicklung von ω_s wird mit dem konstanten Glied $\omega_{s,0}$ abgebrochen.

Bei den drei akustischen Zweigen sind die jeweiligen $\omega_{s,0} = 0$. Damit liefern die zu diesen Zweigen gehörenden drei Glieder jeweils den Grenzwert 1 wegen der Beziehung

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{e^\varepsilon - 1} = 1. \quad (8.13)$$

Man erhält also

$$U = N \kappa \vartheta \left[3 + \sum_{s=4}^{3n} \frac{\frac{\hbar \omega_{s,0}}{\kappa \vartheta}}{\exp \left\{ \frac{\hbar \omega_{s,0}}{\kappa \vartheta} \right\} - 1} \right]. \quad (8.14)$$

Die akustischen Zweige werden hierbei von $s=1$ bis 3, die restlichen 3 (n-1) optischen Zweige von $s=4$ bis 3 n gezählt.

Die Voraussetzung für die Entwicklung (8.14) ist allerdings, daß die optischen Zweige hoch über den akustischen liegen.

Allgemein gibt der Grenzübergang $\vartheta \rightarrow \infty$ wegen (8.13) eine einfache Beziehung, nämlich die Regel von *Dulong* und *Petit*:

$$U = 3 n N \kappa \vartheta = 6 n N \frac{1}{2} \kappa \vartheta. \quad (8.15)$$

Da nN die Gesamtzahl aller Partikel angibt, ist $6 nN$ die gesamte Zahl der Freiheitsgrade aller Teilchen des Körpers.

Die physikalische Bedeutung dieses Ergebnisses ist folgende: Bei extrem hoher Temperatur gehen die Einzelheiten des Schwingungsspektrums nicht in die Innere Energie ein, d. h. die relative Stärke der zwischen den Partikeln wirkenden Kräfte, sei es innerhalb der Zelle oder zu benachbarten Zellen, spielen keine Rolle.

Interessant ist noch folgender Sonderfall: Liefern alle optischen Zweige nur Linienspektren (vgl. Abb. 3a), d. h. ist $\omega_s = \omega_{s,0} = \hat{\omega}_s$ für $s=4, 5 \dots 3n$, so bekommt man als exakte Lösung für die Innere Energie U :

$$U = U_{\text{akust.}} + N \sum_{s=4}^{3n} \frac{\hbar \hat{\omega}_s}{\exp \left\{ \frac{\hbar \hat{\omega}_s}{\kappa \vartheta} \right\} - 1}. \quad (8.16)$$

Hierbei ist $U_{\text{akust.}}$ die Lösung für den klassischen Debye-Fall [2]. Die Summe über die restlichen 3(n-1) Glieder in (8.16) gibt den verallgemeinerten *Einstein*-schen Ansatz für die Innere Energie zur Bestimmung der spezifischen Wärme wieder.

Geht man jetzt von den Sonderfällen zur allgemeinen Beschreibung der Inneren Energie nach (8.11) über, so kann man feststellen: Die Abhängigkeit

der spezifischen Wärme von der absoluten Temperatur wird, im Gegensatz zum üblichen Debye-Fall nicht durch eine bzw. zwei [2], sondern durch eine Reihe von charakteristischen Temperaturen der Form

$$\vartheta_s = \hbar \omega_s, 0 / \kappa \quad (8.17)$$

beschrieben.

Im Fall der Anisotropie ist zur Bestimmung der Inneren Energie U die Integration nicht nur über die Wellenzahlen von $k = 0$ bis $k = k_D$ zu erstrecken, sondern es ist außerdem noch über alle Richtungen zu integrieren. Es ist nämlich jetzt

$$\omega_s = \omega_s(k, \mathbf{n}) \quad (8.18)$$

und damit auch

$$y_s = y_s(k, \mathbf{n}). \quad (8.19)$$

Der Richtungsvektor \mathbf{n} hat in Kugelkoordinaten die Komponenten

$$\mathbf{n} = (\sin \psi \cos \varphi, \sin \psi \sin \varphi, \cos \psi). \quad (8.20)$$

Damit erhält man anstelle von (8.11)

$$U = \frac{3 N}{(\hbar k_D)^3} (\kappa \vartheta)^4 \sum_{s=1}^{3n} \int_0^{x_D} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{y_s(k, \mathbf{n})}{\exp \{y_s(k, \mathbf{n})\} - 1} x^2 \sin \psi \, dx \, d\psi \, d\varphi. \quad (8.21)$$

Für tiefe Temperaturen ergibt sich auch hier das ϑ^3 -Gesetz für die spezifischen Wärmen, während für extrem hohe Temperaturen wieder die Regel von *Dulong* und *Petit* (8.15) erscheint.

9. Schlußfolgerungen

Die hier dargelegte $3n$ -dimensionale Kontinuumstheorie zeigt in ihren Ergebnissen sowohl gute Übereinstimmung mit der Gittertheorie als auch mit den experimentellen Befunden. Dies gilt sowohl für das Frequenzspektrum, insbesondere für die experimentell gesicherte Existenz der optischen Zweige als auch für die Theorie der spezifischen Wärme.

Die $3n$ -dimensionale Elastizitätstheorie geht weit über die normale hinaus. Dabei ist es besonders interessant, daß der verallgemeinerte Spannungstensor, bzw. die Selbst- und Wechsel-Spannungstensoren, die Verschiebungsvektoren selbst enthalten und nicht nur ihre ersten räumlichen Ableitungen. Außerdem treten bei den Volumkräften ebenfalls die Verschiebungen (neben ihren zweiten zeitlichen Ableitungen) auf.

Gerade das Vorhandensein dieser Nahwirkungskräfte zwischen den Zellenpartikeln ist unbedingt notwendig für die Stabilität des Gesamtkontinuums und für das Auftreten der optischen Zweige.

Die Frequenzspektren geben einen vollständigen Einblick in das physikalische Verhalten des elastischen Gesamtgitters. Das experimentell zu gewinnende Dispersionsgesetz, das also den Verlauf der $\omega_s(k)$ -Kurven liefert, ermöglicht

es, alle in die Theorie eingehenden Materialkonstanten zu berechnen. Die Gestalt der Spektren bzw. die Funktion der spektralen Verteilung ist hierfür besser geeignet, als die relativ leicht zu messende spezifische Wärme als Funktion der Temperatur. Denn diese ist, infolge der Integration über alle Wellenzahlen und eventuell über alle Richtungen, wenig empfindlich gegenüber Einzelheiten des Dispersionsgesetzes. Der experimentelle Fortschritt auf dem Gebiet der Beugungsversuche mit Neutronen erlaubt eine direkte Messung der Frequenzspektren. So kann man durch diese physikalischen Versuche eine experimentelle Bestätigung der $3n$ -dimensionalen Elastizitätstheorie erwarten, bei gleichzeitiger Berücksichtigung der Ergebnisse der Gittertheorie.

Eine sehr wichtige Frage ist nun folgende: Unter welchen Umständen ist es ausreichend, ein Kontinuum nach der klassischen 3-dimensionalen Elastizitätstheorie zu behandeln, und unter welchen Bedingungen genügt die übliche Theorie nicht?

Eine Behandlung der Probleme nach der normalen Theorie ist ausreichend, wenn man sich auf kleine Frequenzen und damit auf kleine Energien beschränkt (Abb. 1)*). Denn durch diese Beschränkung wird praktisch der Grenzfall sehr großer Wellenlängen betrachtet. Das Kriterium für die Beantwortung obiger Frage wird also eher durch eine charakteristische Frequenz bzw. eine charakteristische Energie als durch eine charakteristische Länge gegeben. Denn gerade die optischen Wellen besitzen bei sehr großen Wellenlängen auch sehr hohe Frequenzen und damit einen großen elastischen Energieinhalt.

Immer dann, wenn eine starke Deformation oder auch Drehung der Zelle hervorgerufen wird, werden beträchtliche Abweichungen von der normalen Theorie auftreten. Eine solche Deformation oder Drehung der Zelle kann z. B. durch Volumkräfte hervorgerufen werden. Ein Beispiel hierfür sind die Trägheitskräfte beim Durchgang elastischer Wellen. Eine andere Möglichkeit kann durch die Anwesenheit sehr starker elektrischer oder magnetischer Felder gegeben sein.

Eine Deformation der Zelle ist aber außerdem immer gegeben, wenn die Bewegungsgleichungen nicht in eine Gleichung für die Massenmittelpunktsbewegung und weitere Gleichungen für die Bewegung der Zellenpartikel gegeneinander zu separieren sind. Eine solche Entkopplung kann prinzipiell niemals durchgeführt werden, wenn im Fall von Nicht-Zentrosymmetrie die Größen $T_{(ikj)}^{\alpha\beta}$ vorhanden sind. Sie bedingen, daß bereits bei gleichmäßiger Verzerrung aller Untermedien auch die Elementarzellen deformiert werden.

Gerade dieser Punkt ist wichtig, wenn man zur Statik übergeht. Da in diesem Fall die Dichte nicht auftritt, ist es auch nicht möglich, eine oder mehrere charakteristische Frequenzen anzugeben.

Es treten jetzt formal nur charakteristische Längen auf. Aber die Energie ist nach wie vor maßgebend für das physikalische Geschehen. Denn eine mehr

*) Strichelung bedeutet in Abb. 1 Beschränkung auf kleine Frequenzen, Punktierung Beschränkung auf große Wellenlängen.

oder weniger starke Deformation oder Drehung der Zelle ist immer eine Frage der Größe des elastischen Energieinhaltes.

Neben den Quadraten der charakteristischen Frequenzen, die durch die Verhältnisse $T_{ik}^{\alpha\beta}$ zu ϱ^α gegeben sind, legen die Verhältnisse $T_{ik}^{\alpha\beta}$ zu $T_{ik}^{\alpha\beta}$, $T_{ikj}^{\alpha\beta}$ zu $T_{ikj}^{\alpha\beta}$, usw. eine Reihe von charakteristischen Längen fest. Diese Verhältnisse geben u. a. den exponentiellen Abfall bei Grenzschichtproblemen an, so z. B. das Abklingen der durch Randkräfte hervorgerufenen Deformationen oder Verdrehungen der Zellen oder auch das entsprechende Abfallen an Gitterstörungen.

Neben diesen charakteristischen Längen treten noch weitere auf. Zunächst legt der doppelte Zellenabstand die Grenzwellenzahl $k_D = 2\pi / 2a$ und damit auch die Grenze jeder Kontinuumstheorie fest. Außerdem bestimmen die höheren räumlichen Ableitungen (höher als 2. Ordnung) den Fernwirkungsbereich der Kohäsionskräfte (Nichtlokalität). Die allgemeine Lösung des Dispersionsgesetzes berücksichtigt diese Kohäsionskräfte, deren Wirkungsbereich weit über die nächsten Gitternachbarn hinausreicht. Gerade durch die Einbeziehung der Nichtlokalität wird das Verhalten der $\omega_s(k)$ -Kurven im Bereich der größten Wellenzahlen ($k \rightarrow k_D$) und damit die entsprechenden Werte der Grenzfrequenzen $\omega_{s,D}$ bestimmt. Über die Dispersionsfunktion ist aus diesem Grund eine experimentelle Klärung des Sachverhalts bei Nichtlokalität möglich.

Ein besonders wichtiges und weites Feld für die Anwendungsmöglichkeiten der $3n$ -dimensionalen Kontinuumstheorie bietet die Theorie der Gitterfehler. Der gesamte damit zusammenhängende Problemkomplex, wie z. B. Fragen der Inkompatibilität, können in einer $3n$ -dimensionalen Behandlung nochmals aufgerollt werden.

Ein verallgemeinerter Tensor der Versetzungsdichte (in $3n$ -Dimensionen) kann bei der Lösung von Versetzungsproblemen wegen seiner größeren mathematischen Möglichkeiten infolge der größeren Anzahl von Komponenten eine sehr wichtige Rolle spielen.

Da in der Nähe von Gitterfehlern die Verzerrungsenergie sehr hoch ist, kann man erwarten, daß die Konsequenzen aus der Existenz optischer Wellen für die Behandlung von Kristalldefekten von Wichtigkeit sein wird.

Einen gewissen Einblick in diesen Fragenkomplex geben schon Überlegungen über die Stabilität des Gesamtgitters unter Berücksichtigung der Wärmebewegung.

Infolge dieser Wärmebewegung ist das Gitter nie in Ruhe, sondern wird laufend von elastischen Wellen durchquert. Interessant für die Bewegung von Gitterfehlern sind Wellen mit den größten Wellenzahlen ($k \rightarrow k_D$), weil gerade diese Wellen die Verschiebung der Zellen, bzw. einige ihrer Partikel, gegeneinander repräsentieren. Daher ist der Wert der zu diesen Wellen gehörenden verschiedenen Grenzfrequenzen $\omega_{s,D}$ sehr wichtig.

Wäre z. B. eine dieser Grenzfrequenzen fast Null, so würde für einen bestimmten Verschiebungszustand der Zellen bzw. Atome gegeneinander, die gerade der zu dieser Grenzfrequenz gehörenden Schwingungsform entspricht,

praktisch keine Arbeit aufzubringen sein. Wäre die betrachtete Grenzfrequenz exakt Null (was aber nach Voraussetzung 5) ausgeschlossen werden muß), so würde auch die Verschiebungsarbeit verschwinden, d. h. das Gitter wäre instabil.

Ist nun mindestens eine der Grenzfrequenzen $\omega_{s,D}$ sehr klein (verglichen mit der maximalen Frequenz des Zweiges s) und damit auch die zu dieser Schwingungsform gehörende Verschiebungsarbeit sehr gering, so kann die Wärmebewegung die Stabilität des Gitters unter Umständen zerstören oder doch zumindest beeinträchtigen, und zwar dies besonders im Bereich der Gitterfehler.

Im Gegensatz zur normalen Elastizitätslehre kann also eine Verschiebung der Atome gegeneinander und damit auch ein Wandern der Versetzungen und anderer Gitterfehler nach der neuen Theorie mit einem weit geringeren Arbeitsaufwand verbunden sein. Wenn auch genaue Betrachtungen bei Versetzungswanderungen nur durch eine nichtlineare Theorie zu erfassen sind, so kann doch eine lineare Theorie bereits auf einzelne Ansatzpunkte hinweisen.

Der Zusammenhang zwischen Wärmebewegung und Gitterstabilität soll nun genauer untersucht werden.

Jeder Spektralanteil liefert bekanntlich zur gesamten Inneren Energie im Mittel den Anteil (8.7)

$$E_{s,D} = \frac{1}{2} \hbar \omega_{s,D} + \frac{\hbar \omega_{s,D}}{\exp \left\{ \frac{\hbar \omega_{s,D}}{\kappa \vartheta} \right\} - 1}. \quad (9.1)$$

Daher kann man für die Wellenenergie ansetzen

$$\frac{1}{2} \varrho V_c |\dot{\mathbf{u}}|^2 \cdot \omega_{s,D}^2 \sim E_{s,D}. \quad (9.2)$$

Die Zimmertemperatur fällt gerade in das Temperaturgebiet, in dem der Energieanteil $E_{s,D}$ zwischen dem Minimum $\frac{1}{2} \hbar \omega_{s,D}$, also der Nullpunktsenergie und dem maximalen Wert $\kappa \vartheta$ liegen kann.

Nehmen wir zunächst an, es sei $\hbar \omega_{s,D} < \kappa \vartheta$, so ergibt sich für das Verhältnis von Schwingungsamplitude zu Zellenabstand mit

$$V_c = a^3, \quad \varepsilon = \frac{|\dot{\mathbf{u}}|}{a} \quad (9.3)$$

die Beziehung

$$\frac{1}{2} \varrho a^5 \varepsilon^2 \omega_{s,D}^2 = \kappa \vartheta \quad (9.4)$$

oder

$$\varepsilon = \frac{1}{a^2} \left(\frac{2 \kappa \vartheta}{\varrho a} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\omega_{s,D}} \sim \frac{10^{11} \text{ s}^{-1}}{\omega_{s,D}}. \quad (9.5)$$

Es muß aber $\varepsilon \ll 1$, sonst sind die Voraussetzungen für die Brauchbarkeit einer linearen Theorie nicht mehr gegeben. Liegt $\omega_{s,D}$ in der Größenordnung unter 10^{13} s^{-1} , dann zeigt schon die lineare Theorie an, daß das Gesamtgitter infolge der Wärmebewegung instabil wird. Gerade die Unregelmäßigkeit der Energieverteilung leistet der Instabilität Vorschub, da Partikel kurzfristig viel mehr Schwingungsenergie erhalten können, als ihnen nach dem statischen Mittel „zusteht“.

Daher wird auch bei einem gerade noch stabilen Gitter die Wärmebewegung dafür sorgen, daß sich an Versetzungen, aber auch an anderen Gitterfehlern, die Atome so umordnen können, daß ihre gegenseitige potentielle Energie und damit die Gesamtverzerrungsenergie erniedrigt wird. Eine solche Umordnung wird um so wahrscheinlicher, je höher die Temperatur und je geringer der Wert der kleinsten Grenzfrequenz $\omega_{s,D}$ ist.

Dazu kommt noch, daß einzelne optische Zweige sehr hohe Frequenzen enthalten können, so daß schon deren Nullpunktenergie relativ groß ist. Das Gesamtgitter besitzt daher auf der einen Seite einen sehr großen Energieinhalt für einzelne Eigenschwingungen, auf der anderen Seite wird für eine Verschiebung von Zellen bzw. Atomen gegeneinander ($k \rightarrow k_D$) für bestimmte Schwingungsformen eine relativ geringe Energie benötigt. Dieser Sachverhalt kann ein Wandern von Gitterfehlern noch mehr begünstigen.

Auch der andere Grenzfall $\hbar \omega_{s,D} > \kappa \vartheta$ kann bemerkenswert sein, da nämlich $\hbar \omega = \kappa \vartheta$ bei Zimmertemperatur eine Frequenz von $\sim 1,4 \cdot 10^{13} \text{ s}^{-1}$ liefert. Wie schon bemerkt, liegen für den meist interessierenden Temperaturbereich beide Grenzfälle nahe beieinander.

Für den Grenzfall $\hbar \omega_{s,D} > \kappa \vartheta$, d. h. der zum Spektralbereich $\omega_{s,D}$ gehörende Energieanteil wird im wesentlichen durch die Nullpunktenergie gegeben, erhält man

$$\frac{1}{2} \varrho a^5 \varepsilon^2 \omega_{s,D}^2 = \frac{1}{2} \hbar \omega_{s,D} \quad (9.6)$$

oder

$$\varepsilon = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\hbar}{\varrho a} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(\omega_{s,D})^{\frac{1}{2}}} \sim 10^5 \text{ s}^{-\frac{1}{2}} (\omega_{s,D})^{-\frac{1}{2}}. \quad (9.7)$$

Das Ergebnis (9.7) sagt aus: Wenn die Größenordnung von $\omega_{s,D}$ unterhalb 10^{13} s^{-1} liegt, ist eine Stabilität des Gitters auch bei sehr kleinen Temperaturen nicht mehr gewährleistet.

Die zuletzt angestellten Überlegungen zeigen, daß eine Verbindung der $3n$ -dimensionalen Kontinuumstheorie mit der statistischen Mechanik für die Lösung von Problemen der Gitterfehlertheorie nützlich sein kann.

10. Anhang: Die verallgemeinerten Kompatibilitätsgleichungen von Beltrami-Michell

Diese verallgemeinerten Beziehungen sollen aus den $3n$ -dimensionalen Bewegungsgleichungen (3.14) für den Fall der Lokalität, Isotropie und Zentrosymmetrie (6.2) mit Volumkräften abgeleitet werden. Das Prinzip dieser Ableitung soll zunächst für den klassischen Fall dargelegt werden.

Es gelten folgende Definitionen:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i}) \quad (10.1)$$

$$2 G \varepsilon_{ik} = \sigma_{ik} - \frac{\nu}{1 + \nu} \delta_{ik} \sigma_{jj} \quad (10.2)$$

$$2 G \varepsilon_{jj} = \frac{1 - 2 \nu}{1 + \nu} \sigma_{jj} \quad (10.3)$$

mit G als Schubmodul und ν als Querkontraktionszahl.

Die Bewegungsgleichung lautet:

$$\varrho \ddot{u}_i - G \left[u_{i,kk} + \frac{1}{1 - 2\nu} u_{k,ki} \right] - \varrho F_i = 0. \quad (10.4)$$

Man bildet nun die halbe Summe der beiden folgenden differenzierten Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \left\{ \varrho \ddot{u}_i - G \left[u_{i,jj} + \frac{1}{1 - 2\nu} u_{j,ji} \right] - \varrho F_i \right\}_{,k} &= 0, \\ \left\{ \varrho \ddot{u}_k - G \left[u_{k,jj} + \frac{1}{1 - 2\nu} u_{j,jk} \right] - \varrho F_k \right\}_{,i} &= 0. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Man erhält:

$$\begin{aligned} \varrho \frac{1}{2} (\ddot{u}_{i,k} + \ddot{u}_{k,i}) - G \left\{ \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i})_{,jj} + \frac{1}{1 - 2\nu} u_{j,ijk} \right\} \\ - \frac{1}{2} \varrho (F_{i,k} + F_{k,i}) = 0. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Setzt man (10.1) in (10.6) ein, so folgt

$$\varrho \ddot{\varepsilon}_{ik} - G \left\{ \Delta \varepsilon_{ik} + \frac{1}{1 - 2\nu} \varepsilon_{jj,ik} \right\} - \frac{1}{2} \varrho F_{i,k} + F_{k,i} = 0. \quad (10.7)$$

Drückt man jetzt den Verzerrungstensor durch den Spannungstensor nach (10.2) aus, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\varrho}{G} \left[\ddot{\sigma}_{ik} - \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ik} \ddot{\sigma}_{jj} \right] - \Delta \sigma_{ik} + \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ik} \Delta \sigma_{jj} \\ - \frac{1}{1+\nu} \sigma_{jj,ik} - \varrho (F_{i,k} + F_{k,i}) = 0. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Hierbei kann man den Ausdruck $\Delta \sigma_{jj}$ durch Bildung der Divergenz von (10.4) noch vereinfachen.

$$\varrho \ddot{u}_{j,j} - 2G \frac{1-\nu}{1-2\nu} \Delta u_{j,j} - \varrho F_{j,j} = 0 \quad (10.9)$$

mit $u_{j,j} = \varepsilon_{jj}$ erhält man unter Berücksichtigung von (10.3)

$$\frac{\varrho}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \ddot{\sigma}_{jj} - \frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{1-2\nu}{1+\nu} \Delta \sigma_{jj} - \varrho F_{j,j} = 0 \quad (10.10)$$

und damit

$$\frac{\nu}{1+\nu} \Delta \sigma_{jj} = \frac{\varrho}{2G} \frac{\nu(1-2\nu)}{1-\nu} \ddot{\sigma}_{jj} - \varrho \frac{\nu}{1-\nu} F_{j,j}. \quad (10.11)$$

Unter Anwendung von (10.11) ergibt sich schließlich für die üblichen Kompatibilitätsgleichungen von *Beltrami-Michell* unter Berücksichtigung der Trägheitskräfte:

$$\begin{aligned} \frac{\varrho}{G} \left[-\ddot{\sigma}_{ik} + \frac{\nu(1+2\nu)}{2(1-\nu)} \delta_{ik} \ddot{\sigma}_{jj} \right] + \Delta \sigma_{ik} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{jj,ik} \\ + \varrho \left[\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ik} F_{j,j} + F_{i,k} + F_{k,i} \right] = 0. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Völlig analog kann man für den Fall der $3n$ -dimensionalen Elastizitätstheorie die verallgemeinerten Gleichungen von *Beltrami-Michell* angeben.

Es gelten für die n Selbstverzerrungstensoren und die n Selbstspannungstensoren die Beziehungen

$$\varepsilon_{ik}^{\alpha} = \frac{1}{2} (u_{i,k}^{\alpha} + u_{k,i}^{\alpha}) \quad (10.13)$$

$$2G^{\alpha} \varepsilon_{ik}^{\alpha} = \sigma_{ik}^{\alpha\alpha} - \frac{\nu^{\alpha\alpha}}{1+\nu^{\alpha\alpha}} \delta_{ik} \sigma_{jj}^{\alpha\alpha} \quad (10.14)$$

$$2G^{\alpha} \varepsilon_{jj}^{\alpha} = \frac{1-2\nu^{\alpha\alpha}}{1+\nu^{\alpha\alpha}} \sigma_{jj}^{\alpha\alpha}. \quad (10.15)$$

Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\varrho^\alpha \ddot{u}_i^\alpha + \sum_\beta \left[\iota^{\alpha\beta} u_i^\beta - G^{\alpha\beta} (u_{i,jj}^\beta + \frac{\nu^{\alpha\beta}}{1-2\nu^{\alpha\beta}} u_{j,ji}^\beta) \right] - \varrho^\alpha F_i^\alpha = 0. \quad (10.16)$$

Das verallgemeinerte *Hookesche* Gesetz gestattet es, alle Spannungstensoren durch die n Selbstverzerrungstensoren ε_{ik}^α auszudrücken. Für den hier behandelten Spezialfall gelten nach (5.10) die Symmetrien

$$\begin{aligned} \sigma_{ik}^{\alpha\beta} &= \sigma_{ki}^{\alpha\beta} \\ \sigma_{ik}^{\alpha\beta} &= \sigma_{ik}^{\beta\alpha}. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Es sind also wegen dieser Symmetrien (10.17) neben den n Selbstspannungstensoren weitere $\binom{n}{2}$ Wechselspannungstensoren vorhanden. Im folgenden werden nun alle Wechselspannungstensoren über die n Selbstverzerrungstensoren ε_{ik}^α durch die n Selbstspannungstensoren $\sigma_{ik}^{\alpha\alpha}$ ausgedrückt.

Dies bedeutet: Durch das verallgemeinerte *Hookesche* Gesetz müssen alle $\binom{n}{2}$ Wechselspannungstensoren linear durch die n Selbstspannungstensoren ausdrückbar sein.

Die verallgemeinerten Beltrami-Mitchell-Kompabilitätsbeziehungen liefern dann $6n$ skalare Gleichungen für die $6n$ Komponenten der Selbstspannungstensoren.

Entsprechend der Ableitung in der normalen Theorie erhält man jetzt

$$\begin{aligned} \left\{ \varrho^\alpha \ddot{u}_i^\alpha + \sum_\beta \left[\iota^{\alpha\beta} u_i^\beta - G^{\alpha\beta} \left(u_{i,jj}^\beta + \frac{\nu^{\alpha\beta}}{1-2\nu^{\alpha\beta}} u_{j,ji}^\beta \right) \right] - \varrho^\alpha F_i^\alpha \right\}_{,k} &= 0 \\ \left\{ \varrho^\alpha \ddot{u}_k^\alpha + \sum_\beta \left[\iota^{\alpha\beta} u_k^\beta - G^{\alpha\beta} \left(u_{k,jj}^\beta + \frac{\nu^{\alpha\beta}}{1-2\nu^{\alpha\beta}} u_{j,jk}^\beta \right) \right] - \varrho^\alpha F_k^\alpha \right\}_{,i} &= 0. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Die halbe Summe der beiden Gleichungen (10.18) liefert:

$$\begin{aligned} \varrho^\alpha \varepsilon_{ik}^\alpha + \sum_\beta \left[\iota^{\alpha\beta} \varepsilon_{ik}^\beta - G^{\alpha\beta} \left(\Delta \varepsilon_{ik}^\beta + \frac{\nu^{\alpha\beta}}{1-2\nu^{\alpha\beta}} \varepsilon_{jj,ik}^\beta \right) \right] \\ = \frac{1}{2} \varrho^\alpha (F_{i,k}^\alpha + F_{k,i}^\alpha). \end{aligned} \quad (10.19)$$

Nun werden die Selbstverzerrungstensoren ε_{ik}^α durch Selbstspannungstensoren $\sigma_{ik}^{\alpha\alpha}$ ausgedrückt, wobei eine Vereinfachung des Ausdrucks $\Delta \sigma_{jj}^\alpha$ entsprechend (10.11) über die Bewegungsgleichungen jetzt nicht mehr möglich ist.

$$\begin{aligned} \frac{\varrho^\alpha}{G^{\alpha\alpha}} \left[\ddot{\sigma}_{ik}^{\alpha\alpha} - \frac{\nu^{\alpha\alpha}}{1+\nu^{\alpha\alpha}} \delta_{ik} \ddot{\sigma}_{jj}^{\alpha\alpha} \right] + \sum_\beta \left\{ \frac{\iota^{\alpha\beta}}{G^{\beta\beta}} \left[\sigma_{ik}^{\beta\beta} - \frac{\nu^{\beta\beta}}{1+\nu^{\beta\beta}} \delta_{ik} \sigma_{jj}^{\beta\beta} \right] \right. \\ \left. - \frac{G^{\alpha\beta}}{G^{\beta\beta}} \left[\Delta \sigma_{ik}^{\beta\beta} - \frac{\nu^{\beta\beta}}{1+\nu^{\beta\beta}} \delta_{ik} \Delta \sigma_{jj}^{\beta\beta} + \frac{\nu^{\alpha\beta}}{1-2\nu^{\alpha\beta}} \cdot \frac{1-2\nu^{\beta\beta}}{1+\nu^{\beta\beta}} \sigma_{jj,ik}^{\beta\beta} \right] \right\} \\ = \varrho^\alpha [F_{i,k}^\alpha + F_{k,i}^\alpha]. \end{aligned} \quad (10.20)$$

In die Randbedingungen geht nach (4.2) und (4.4) der Gesamtspannungstensor des Untermediums α

$$\sigma_{(ik)}^\alpha = \sum_{\beta} \sigma_{(ik)}^{\alpha\beta} \quad (10.21)$$

ein, der sich über das verallgemeinerte *Hookesche* Gesetz ebenfalls durch die Selbstspannungstensoren $\sigma_{(ik)}^{\alpha\alpha}$ ausdrücken läßt.

Literatur

- [1] *Baumgarte, J., and Kröner, E.*: 3n-dimensional Mechanics of Generalized Continua. Proc. 12th Int. Congr. Appl. Mech., Stanford (1969), Springer-Verlag, 114 (1969).
- [2] *Brillouin, L.*: Wave Propagation in Periodic Structures. Dover Publ., Inc. New York 1953.
- [3] *Cosserat, E., et F. Cosserat*: Théorie des Corps Déformables. A. Herman et Fils, Paris 1909.
- [4] *Eringen, A. C.*: Mechanics of Micromorphic Materials. Proc. of the 11th International Congress of Applied Mechanics. Berlin - Heidelberg - New York: Springer 1966, S. 131—138.
- [5] *Eringen, A. C.*: Theory of Micropolar Continua. Proc. 9th Midwestern Mechanics Congress, 3, part 1. Wiley 1967, S. 23—40.
- [6] *Eringen, A. C.*: Linear Theory of Micropolar Elasticity. J. Math. & Mech. **15**, 6 (1966), S. 909—924.
- [7] *Eringen, A. C.*: Mechanics of Micromorphic Continua. Proc. IUTAM-Symposium, Freudenstadt-Stuttgart 1967, Mechanics of Generalized Continua, Editor E. Kröner, Springer 1968, S. 18—35.
- [8] *Eringen, A. C., and Suhubi, E. S.*: Nonlinear Theory of Simple Micro-Elastic Solids I, II. Int. J. Engrg. Sci. **2** (1964), S. 189—203, 389—404.
- [9] *Green, A. E., and R. S. Rivlin*: Simple Force and Stress Multipoles. Arch. Rat. Mech. Anal. **16** (1964), S. 325.
- [10] *Green, A. E., and R. S. Rivlin*: Multipolar Continuum Mechanics. Arch. Rat. Mech. Anal. **17** (1964), S. 113.
- [11] *Günther, W.*: Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. Abh. Braunschw. Wiss. Ges., **10** (1958), S. 195—213.
- [12] *Kröner, E.*: Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen. Z. Physik **136** (1953), S. 402.
- [13] *Kröner, E.*: Continuum mechanics and range of atomic cohesion forces. Int. Conf. on Fracture **1** (1965), S. 1 (preprint).
- [14] *Kröner, E.*: Elasticity Theory of Materials with Long-Range Cohesive Forces. Int. J. Solids Structures **3** (1967), S. 731.
- [15] *Kröner, E.*: Interrelations between Various Branches of Continuum Mechanics. Proc. IUTAM-Symposium Freudenstadt-Stuttgart 1967, Mechanics of Generalized Continua, Editor E. Kröner, Springer 1968, S. 330—340.
- [16] *Kröner, E., und B. K. Datta*: Nichtlokale Elastostatik: Ableitung aus der Gittertheorie. Z. Physik **196** (1966), S. 203.
- [17] *Krumhansl, J. A.*: Generalized Continuum Field Representation for Lattice Vibrations, in Lattice Dynamics (edited by R. F. Wallis). Pergamon Press Inc., New York 1965, p. 627.
- [18] *Krumhansl, J. A.*: Some Considerations of the Relation between Solid State Physics and Generalized Continuum Mechanics. Proc. IUTAM-Symposium Freudenstadt-Stuttgart 1967, Mechanics of Generalized Continua, Editor E. Kröner, Springer 1968, S. 298—311.
- [19] *Kunin, I. A.*: Model of an elastic medium of simple structure with threedimensional dispersion. PMM **30** (1966), S. 542.
- [20] *Kunin, I. A.*: Theory of elasticity with spatial dispersion. One-dimensional complex structure. PMM **30** (1966), S. 866.

- [21] *Kunin, I. A.*: The Theory of Elastic Media with Microstructure and the Theory of Dislocations. Proc. IUTAM-Symposium Freudenstadt-Stuttgart 1967, Mechanics of Generalized Continua, Editor E. Kröner, Springer 1968, S. 321—329.
- [22] *Leibfried, G.*: Gittertheorie der mechanischen und thermischen Eigenschaften der Kristalle, in Hdb. d. Physik VII/1 (herausgegeben von S. Flügge). Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1955.
- [23] *Mindlin, R. D.*: Influence of Couple-Stresses on Stress Concentrations. Experimental Mechanics (1963), p. 1.
- [24] *Mindlin, R. D.*: Micro-structure in Linear Elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal. **16** (1964), S. 51.
- [25] *Mindlin, R. D.*: Stress Functions for a Cosserat Continuum. Int. J. Solids Structures **1** (1965), S. 265.
- [26] *Mindlin, R. D.*: Second Gradient of Strain and Surface Tension in Linear Elasticity. Int. J. Solids Structures **1** (1965), S. 417.
- [27] *Mindlin, R. D.*: Theories of Elastic Continua and Crystal Lattice Theories. Proc. IUTAM-Symposium Freudenstadt-Stuttgart 1967, Mechanics of Generalized Continua, Editor E. Kröner, Springer 1968, S. 312—320.
- [28] *Mindlin, R. D.*, and *H. F. Tiersten*: Effect of Couple-Stresses in Linear Elasticity. Arch. Rat. Mech. Anal. **11** (1962), S. 415.
- [29] *Schaefer, H.*: Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen ebenen Cosserat-Kontinuums. Printed in Miszellaneen der Angewandten Mechanik (Festschrift Walter Tollmien), p. 277. Akademie-Verlag, Berlin 1962.
- [30] *Schaefer, H.*: Analysis der Motorfelder im Cosserat-Kontinuum. ZAMM **47** (1967), S. 319—328.
- [31] *Schaefer, H.*: The Basic Affine Connection in a Cosserat-Continuum. Proc. IUTAM-Symposium Freudenstadt-Stuttgart 1967, Mechanics of Generalized Continua, Editor E. Kröner, Springer 1968, S. 57—62.
- [32] *Toupin, R. A.*: Theories of Elasticity with Couple-stress. Arch. Rat. Mech. Anal. **17** (1964), S. 85.
- [33] *Toupin, R. A.*: Stress Tensors in Elastic Dielectrics. Arch. Rat. Mech. Anal. **5** (1960), S. 440.
- [34] *Toupin, R. A.*: Elastic Materials with Couple-Stresses. Arch. Rat. Mech. Anal. **11** (1962), S. 385.
- [35] *Toupin, R. A.*, and *D. S. Gazis*: Surface Effects and Initial Stresses in Continuum and Lattice Models of Elastic Crystals. Proc. Int. Conf. on Lattice Dynamics, p. 597, Denmark 1963. R. F. Wallis, Editor, Pergamon Press 1964.
- [36] *Rivlin, R. S.*: Generalized Mechanics of Continuous Media. Proc. IUTAM-Symposium Freudenstadt-Stuttgart 1967, Mechanics of Generalized Continua, Editor E. Kröner, Springer 1968, S. 1—17.